Physik I und Einführung in die theoretische Physik I
Übungsaufgaben

Manuel Hohmann

1. Dezember 2011

1. **Komplexe Zahlen**

   (a) Sei
   $$z = x + iy = re^{i\phi}$$
   eine komplexe Zahl in der kartesischen und in der Polardarstellung. Bestimmen Sie x, y als Funktion von r, ϕ und umgekehrt. Wie lauten die beiden Darstellungen der komplex konjugierten Zahl $\bar{z}$ (andere Schreibweise: z^*)?

   (b) Seien
   $$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\phi_1}\,, \qquad z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\phi_2}$$
   zwei komplexe Zahlen. Berechnen Sie das Produkt $z_1 z_2$ in beiden Darstellungen. Verifizieren Sie, dass beide Darstellungen das gleiche Ergebnis liefern.

2. **Sommerfeldpendel**

Beim Sommerfeldpendel handelt es sich um eine Masse an einer Schraubenfeder, die sowohl eine lineare Schwingung in vertikaler Richtung als auch eine Rotationsschwingung um die vertikale Achse ausführen kann. Die Besonderheit besteht darin, dass diese beiden Schwingungen gekoppelt sind.

(a) Sei x die lineare Auslenkung des Pendels aus der Gleichgewichtslage und θ der Winkel, um den das Pendel aus der Gleichgewichtslage gedreht ist. Betrachten Sie zunächst die ungedämpften Bewegungsgleichungen, die gegeben sind durch

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -Dx - \alpha\theta\,, \\ I\ddot{\theta} &= -k\theta - \beta x\,. \end{aligned}$$

Dabei sind m die Masse und I das Trägheitsmoment des Pendelkörpers bezüglich der vertikalen Drehachse. D, k, α, β sind Konstanten, die Eigenschaften der Schraubenfeder beschreiben.

i. Welche physikalische Bedeutung haben die Konstanten D, k, α, β?

ii. Bestimmen Sie die Eigenschwingungen des Pendels und ihre Kreisfrequenzen. Welche Bedingungen folgen daraus für D, k, α, β?

iii. Geben Sie die allgemeinste Lösung der Bewegungsgleichungen an.

(b) Betrachten Sie nun eine lineare Dämpfung der linearen und der Rotationsbewegung. Die Bewegungsgleichungen lauten nun

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -Dx - \alpha\theta - \delta_1\dot{x}\,, \\ I\ddot{\theta} &= -k\theta - \beta x - \delta_2\dot{\theta}\,, \end{aligned}$$

mit zwei weiteren positiven Konstanten δ_1, δ_2. Bestimmen Sie erneut die Eigenschwingungen des Pendels und die allgmeinste Lösung.

(c) Der Aufhängepunkt des gedämpften Pendels wird nun periodisch mit Amplitude x_0 und Kreisfrequenz ω auf und ab bewegt. Dadurch ändern sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -D(x - x_0\cos(\omega t)) - \alpha\theta - \delta_1\dot{x}\,, \\ I\ddot{\theta} &= -k\theta - \beta(x - x_0\cos(\omega t)) - \delta_2\dot{\theta}\,. \end{aligned}$$

Nehmen Sie an, dass der Einschwingvorgang bereits abgeklungen ist und lösen Sie die Bewegungsgleichungen.

(d) Zusätzlich zur linearen Bewegung wird die Aufhängung des Pendels nun mit der gleichen Kreisfrequenz ω um den Winkel θ_0 gedreht, wobei die lineare und die Rotationsbewegung um die Phase ϕ verschoben sind.

i. Wie lauten nun die Bewegungsgleichungen?

ii. Geben Sie die Lösung an und verwenden Sie wieder die Annahme, dass der Einschwingvorgang bereits abgeklungen ist.

Bei allen Teilaufgaben ist es sinnvoll, Abkürzungen für häufiger auftretende Ausdrücke einzuführen. Darüber hinaus bietet es sich an, komplexe Zahlen zu verwenden.