

Singulaarsusteoreemid ja mustade aukude termodünaamika

Tööd üldrelatiivsusteooriast, 1965 kuni 70-ndate algus

Manuel Hohmann

Teoreetilise Füüsika Labor - Füüsika Instituut - Tartu Ülikool
Tippkeskus TK133 "Tume Universum"



European Union
European Regional
Development Fund



Investing
in your future

Stephen Hawking 1942-2018 - 27. märts 2018

- ▶ Tõeline singulaarsus või koordinaatsingulaarsus?
 - ▶ Intuitiivne definitsioon: singulaarsusel läheb “mingi suurus” lõpmatusse.
 - ▶ Probleem: Füüsikalised suurused üldjuhul sõltuvad koordinaatvalikust.
 - ▶ Lahendus: Vaatame ainult skalaarseid suurusi (nt Ricci skalaar, Kretschmanni skalaar).

- ▶ Tõeline singulaarsus või koordinaatsingulaarsus?
 - ▶ Intuitiivne definitsioon: singulaarsusel läheb “mingi suurus” lõpmatusse.
 - ▶ Probleem: Füüsikalised suurused üldjuhul sõltuvad koordinaatvalikust.
 - ▶ Lahendus: Vaatame ainult skalaarseid suurusi (nt Ricci skalaar, Kretschmanni skalaar).
- ▶ Singulaarsuse eemaldamine aegruumist?
 - ▶ Idee: eemaldame aegruumist neid punkte, kus midagi $\rightarrow \infty$ - singulaarsusi enam pole?
 - ▶ Probleem: kuidas eristada, kas trajektoor läheb eemaldatud hulka või lõpmatusse?
 - ▶ Lahendus: trajektoori afiinne pikkus:
 - ▶ Kui on lõplik, siis trajektoor läheb eemaldatud aegruumi alamhulka.
 - ▶ Kui on lõpmatu, siis trajektoor läheb lõpmatusse.

Singulaarsuse definitsiooni probleem (Geroch 1968)

- ▶ Tõeline singulaarsus või koordinaatsingulaarsus?
 - ▶ Intuiitivne definitsioon: singulaarsusel läheb “mingi suurus” lõpmatusse.
 - ▶ Probleem: Füüsikalised suurused üldjuhul sõltuvad koordinaatvalikust.
 - ▶ Lahendus: Vaatame ainult skalaarseid suursi (nt Ricci skalaar, Kretschmanni skalaar).
- ▶ Singulaarsuse eemaldamine aegruumist?
 - ▶ Idee: eemaldame aegruumist neid punkte, kus midagi $\rightarrow \infty$ - singulaarsusi enam pole?
 - ▶ Probleem: kuidas eristada, kas trajektoor läheb eemaldatud hulka või lõpmatusse?
 - ▶ Lahendus: trajektoori afiinne pikkus:
 - ▶ Kui on lõplik, siis trajektoor läheb eemaldatud aegruumi alamhulka.
 - ▶ Kui on lõpmatu, siis trajektoor läheb lõpmatusse.

Singulaarsuse puudumine kui geodeetiline täielikkus

(Pseudo-)Riemanni muutkond on geodeetiliselt täielik, kui iga mittejätkatava geodeetilise joone afiinse parameetri lähtehulk on kogu reaalarvude hulk \mathbb{R} .

Singulaarsuse teoreem

Ei ole võimalik leida aegruumi M nii, et korraga kehtivad:

1. M ei sisalda kinniseid kausaalseid trajektoore.
2. Igal mittejätkataval kausaalsel geodeetilisel joonel on kaaspunkti paar.
3. M sisaldab (tulevikus või minevikus) lõksu püütud pinda $S \subset M$.

Singulaarsuse teoreem

Ei ole võimalik leida aegruumi M nii, et korraga kehtivad:

1. M ei sisalda kinniseid kausaalseid trajektoore.
2. Igal mittejätkataval kausaalsel geodeetilisel joonel on kaaspunkti paar.
3. M sisaldab (tulevikus või minevikus) lõksu püütud pinda $S \subset M$.

1. Kinnine kausaalne joon?

- ▶ Vaatleja liigub kausaalsel joonel (tulevikku suunas, valgusest aeglasemalt).
- ▶ Kinnine joon: vaatleja külastab taas sama punkti aegruumis.
- ▶ Vaatleja võib näiteks oma sündi näha ja vältida - ajareisi probleem!

Singulaarsuse teoreem

Ei ole võimalik leida aegruumi M nii, et korraga kehtivad:

1. M ei sisalda kinniseid kausaalseid trajektoore.
2. Igal mittejätkataval kausaalsel geodeetilisel joonel on kaaspunkti paar.
3. M sisaldab (tulevikus või minevikus) lõksu püütud pinda $S \subset M$.

1. Kinnine kausaalne joon?

- ▶ Vaatleja liigub kausaalsel joonel (tulevikku suunas, valgusest aeglasemalt).
- ▶ Kinnine joon: vaatleja külastab taas sama punkti aegruumis.
- ▶ Vaatleja võib näiteks oma sünni näha ja vältida - ajareisi probleem!

2. Geodeetilise joone kaaspunkti paar?

- ▶ Kas teine lähedal asuv geodeetiline joon lõikab joont kaks korda?
- ▶ Kahe lõikepunkti olemasolu - geodeetilised jooned koonduvad.

Singulaarsuse teoreem

Ei ole võimalik leida aegruumi M nii, et korraga kehtivad:

1. M ei sisalda kinniseid kausaalseid trajektoore.
2. Igal mittejätkataval kausaalsel geodeetilisel joonel on kaaspunkti paar.
3. M sisaldab (tulevikus või minevikus) lõksu püütud pinda $S \subset M$.

1. Kinnine kausaalne joon?

- ▶ Vaatleja liigub kausaalsel joonel (tulevikku suunas, valgusest aeglasemalt).
- ▶ Kinnine joon: vaatleja külastab taas sama punkti aegruumis.
- ▶ Vaatleja võib näiteks oma sünni näha ja vältida - ajareisi probleem!

2. Geodeetilise joone kaaspunkti paar?

- ▶ Kas teine lähedal asuv geodeetiline joon lõikab joont kaks korda?
- ▶ Kahe lõikepunkti olemasolu - geodeetilised jooned koonduvad.

3. Lõksu püütud pind?

- ▶ Valgus, mis väljub pinnast, koondub, sõltumatult väljumise suunast.
- ▶ Näide: musta augu horisondilt valgus saab ainult sisse levida.

Singulaarsuse teoreemi järeltus

Aegruum M ei saa olla geodeetiliselt täielik, kui lisaks Einsteini võrranditele kehtib:

1. M ei sisalda kinniseid kausaalseid trajektoore.
2. Tugev energia tingimus on rahuldatud: iga tulevikku näitav vektoriväli X^μ rahuldab

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) X^\mu X^\nu \geq 0.$$

3. Igal kausaalsel geodeetilisel joonel on punkt, kus kehtib

$$\dot{\gamma}_{[\mu} R_{\nu]\rho\sigma[\omega} \dot{\gamma}_{\tau]} \dot{\gamma}^\rho \dot{\gamma}^\sigma \neq 0.$$

4. M sisaldab ühte järgnevast:

- 4.1 lõksu püütud pinda;
- 4.2 punkti p , mille minevikus kõikide valguse kiirguste koondumise märk muutub;
- 4.3 kompakset ruumilist hüüperpinda.

1. Eeldame, et kinniseid kausaalseid trajektoore ei ole.

Teoreemi rakendamine kosmosele ja mustadele aukudele

1. Eeldame, et kinniseid kausaalseid trajektoore ei ole.
2. “Tavaline” materia (tolm, kiirgus. . .) rahuldab tugevat energiatingimust.

Teoreemi rakendamine kosmosele ja mustadele aukudele

1. Eeldame, et kinniseid kausaalseid trajektoore ei ole.
2. “Tavaline” materia (tolm, kiirgus. . .) rahuldab tugevat energiatingimust.
3. Nii kosmoloogiline, paisuv aegruum kui kokku varisev täht rahuldab

$$\dot{\gamma}_{[\mu} R_{\nu]\rho\sigma} [\omega \dot{\gamma}_{\tau]} \dot{\gamma}^{\rho} \dot{\gamma}^{\sigma} \neq 0.$$

1. Eeldame, et kinniseid kausaalseid trajektoore ei ole.
2. “Tavaline” aegruum (tolm, kiirgus. . .) rahuldab tugevat energiatingimust.
3. Nii kosmoloogiline, paisuv aegruum kui kokku varisev täht rahuldab

$$\dot{\gamma}_{[\mu} R_{\nu]\rho\sigma} [\omega \dot{\gamma}_{\tau]} \dot{\gamma}^{\rho} \dot{\gamma}^{\sigma} \neq 0.$$

4. Erinevate aegruumide omadused:

- ▶ Must auk:
 - ▶ Kui tekib horisont, siis tekib ka lõksu püütud pind (valgus levib ainult sisse).
- ⇒ **Musta augu sees asub singulaarsus.**

1. Eeldame, et kinniseid kausaalseid trajektoore ei ole.
2. “Tavaline” materia (tolm, kiirgus. . .) rahuldab tugevat energiatingimust.
3. Nii kosmoloogiline, paisuv aegruum kui kokku varisev täht rahuldab

$$\dot{\gamma}_{[\mu} R_{\nu]\rho\sigma} [\omega \dot{\gamma}_{\tau]} \dot{\gamma}^{\rho} \dot{\gamma}^{\sigma} \neq 0.$$

4. Erinevate aegruumide omadused:

- ▶ Must auk:
 - ▶ Kui tekib horisont, siis tekib ka lõksu püütud pind (valgus levib ainult sisse).
 - ⇒ Musta augu sees asub singulaarsus.
- ▶ Universum:
 - ▶ Kosmiline taustkiirgus näitab, et valguse trajektoorid koonduvad minevikku.
 - ⇒ **Universumi alguses on singulaarsus.**

- ▶ Mustadel aukudel on ainult kolm välisele vaatlejale nähtavat, sõltumatut parameetrit:
 - ▶ mass m ,
 - ▶ impulssmoment J ,
 - ▶ elektriline laeng Q .

Mustadel aukudel pole karvu (Israel 1967, Wheeler 1973)

- ▶ Mustadel aukudel on ainult kolm välisele vaatlejale nähtavat, sõltumatut parameetrit:
 - ▶ mass m ,
 - ▶ impulssmoment J ,
 - ▶ elektriline laeng Q .
- ▶ Need parameetrid täielikult kirjeldavad igat musta auku.
- ▶ Muid sõltumatuid parameetreid (“karvu”) ei ole!

Mustadel aukudel pole karvu (Israel 1967, Wheeler 1973)

- ▶ Mustadel aukudel on ainult kolm välisele vaatlejale nähtavat, sõltumatut parameetrit:
 - ▶ mass m ,
 - ▶ impulssmoment J ,
 - ▶ elektriline laeng Q .
 - ▶ Need parameetrid täielikult kirjeldavad igat musta auku.
 - ▶ Muid sõltumatuid parameetreid (“karvu”) ei ole!
- ⇒ Ranged seosed teiste mustade aukude omaduste vahel:
- ▶ pindgravitatsioon κ horisondil,
 - ▶ horisondi pindala A ,
 - ▶ nurksagedus Ω ,
 - ▶ elektrostaatiline potentsiaal Φ .

Mustadel aukudel pole karvu (Israel 1967, Wheeler 1973)

- ▶ Mustadel aukudel on ainult kolm välisele vaatlejale nähtavat, sõltumatut parameetrit:
 - ▶ mass m ,
 - ▶ impulssmoment J ,
 - ▶ elektriline laeng Q .
 - ▶ Need parameetrid täielikult kirjeldavad igat musta auku.
 - ▶ Muid sõltumatuid parameetreid (“karvu”) ei ole!
- ⇒ Ranged seosed teiste mustade aukude omaduste vahel:
- ▶ pindgravitatsioon κ horisondil,
 - ▶ horisondi pindala A ,
 - ▶ nurksagedus Ω ,
 - ▶ elektrostaatiline potentsiaal Φ .
- ▶ Seosed on sarnased termodünaamika seadustega.

0. Statsionaarse musta augu horisondil on konstantne pindgravitatsioon.

- 0. Statsionaarse musta augu horisondil on konstantne pindgravitatsioon.
- 1. Musta augu energia muutus häirituste puhul on

$$dE = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ.$$

0. Statsionaarse musta augu horisondil on konstantne pindgravitatsioon.
1. Musta augu energia muutus häirituste puhul on

$$dE = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ.$$

- ▶ E : energia
- ▶ κ : pindgravitatsioon horisondil
- ▶ A : horisondi pindala
- ▶ Ω : nurksagedus
- ▶ J : impulssmoment
- ▶ Φ : elektrostaatiline potentsiaal
- ▶ Q : elektriline laeng

0. Statsionaarse musta augu horisondil on konstantne pindgravitatsioon.

1. Musta augu energia muutus häirituste puhul on

$$dE = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ.$$

- ▶ E : energia
- ▶ κ : pindgravitatsioon horisondil
- ▶ A : horisondi pindala
- ▶ Ω : nurksagedus
- ▶ J : impulssmoment
- ▶ Φ : elektrostaatiline potentsiaal
- ▶ Q : elektriline laeng

2. Musta augu horisondi pindala on mittekahanev funktsioon ajast,

$$\frac{dA}{dt} \geq 0.$$

0. Statsionaarse musta augu horisondil on konstantne pindgravitatsioon.
1. Musta augu energia muutus häirituste puhul on

$$dE = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ.$$

- ▶ E : energia
 - ▶ κ : pindgravitatsioon horisondil
 - ▶ A : horisondi pindala
 - ▶ Ω : nurksagedus
 - ▶ J : impulssmoment
 - ▶ Φ : elektrostaatiline potentsiaal
 - ▶ Q : elektriline laeng
2. Musta augu horisondi pindala on mittekahanev funktsioon ajast,

$$\frac{dA}{dt} \geq 0.$$

3. Pindgravitatsioon ei saa olla null, $\kappa \neq 0$.

0. Statsionaarse musta augu horisondil on konstantne pindgravitatsioon.
1. Musta augu energia muutus häirituste puhul on

$$dE = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ.$$

- ▶ E : energia
- ▶ κ : pindgravitatsioon horisondil
- ▶ A : horisondi pindala
- ▶ Ω : nurksagedus
- ▶ J : impulssmoment
- ▶ Φ : elektrostaatiline potentsiaal
- ▶ Q : elektriline laeng

2. Musta augu horisondi pindala on mittekahanev funktsioon ajast,

$$\frac{dA}{dt} \geq 0?$$

3. Pindgravitatsioon ei saa olla null, $\kappa \neq 0$.

- ▶ S. W. Hawking and R. Penrose,
“The Singularities of gravitational collapse and cosmology,”
Proc. Roy. Soc. Lond. A **314** (1970) 529.
- ▶ S. W. Hawking,
“Black holes in general relativity,”
Commun. Math. Phys. **25** (1972) 152.
- ▶ S. W. Hawking and G. F. R. Ellis,
“The Large Scale Structure of Space-Time,”
doi:10.1017/CBO9780511524646
- ▶ J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking,
“The Four laws of black hole mechanics,”
Commun. Math. Phys. **31** (1973) 161.
- ▶ S. W. Hawking,
“Black Holes and Thermodynamics,”
Phys. Rev. D **13** (1976) 191.