

Der neutrinolose Doppel- β -Zerfall

Manuel Hohmann

Labor für theoretische Physik - Institut für Physik - Universität Tartu
Exzellenzzentrum "The Dark Side of the Universe"

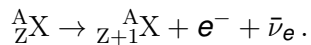


Habilitationsvortrag - 21. Juli 2022

- 1 Der Doppel- β -Zerfall
- 2 Dirac- und Majorana-Teilchen
- 3 Das Neutrino im Standardmodell
- 4 Jenseits des Standardmodells: massive Neutrinos
- 5 Zusammenfassung

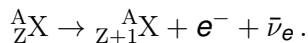
- 1 Der Doppel- β -Zerfall
- 2 Dirac- und Majorana-Teilchen
- 3 Das Neutrino im Standardmodell
- 4 Jenseits des Standardmodells: massive Neutrinos
- 5 Zusammenfassung

- β^- -Zerfall eines Kerns ${}^A_Z\text{X}$ der Massenzahl $A = Z + N$ und Kernladungszahl Z :

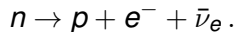


Der β -Zerfall

- β^- -Zerfall eines Kerns A_ZX der Massenzahl $A = Z + N$ und Kernladungszahl Z :

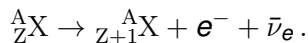


⇒ Umwandlung eines Neutrons in ein Proton, Elektron und Antineutrino:

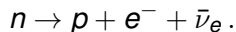


Der β -Zerfall

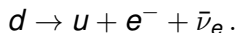
- β^- -Zerfall eines Kerns A_ZX der Massenzahl $A = Z + N$ und Kernladungszahl Z :



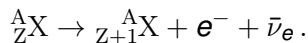
⇒ Umwandlung eines Neutrons in ein Proton, Elektron und Antineutrino:



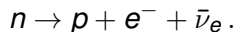
⇒ Umwandlung eines Down-Quarks in ein Up-Quark, Elektron und Antineutrino:



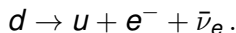
- β^- -Zerfall eines Kerns ${}^A_Z\text{X}$ der Massenzahl $A = Z + N$ und Kernladungszahl Z :



⇒ Umwandlung eines Neutrons in ein Proton, Elektron und Antineutrino:

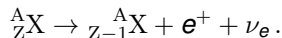


⇒ Umwandlung eines Down-Quarks in ein Up-Quark, Elektron und Antineutrino:

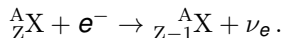


- Verwandte Prozesse:

- β^+ -Zerfall:



- Elektroneneinfang:



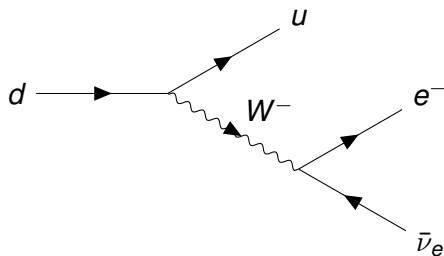
- β^- -Zerfall in zwei Stufen mit W^- -Boson als Austauscheteilchen:

$$d \rightarrow u + W^-, \quad W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e.$$

- β^- -Zerfall in zwei Stufen mit W^- -Boson als Austauscheteilchen:

$$d \rightarrow u + W^-, \quad W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e.$$

- Feynman-Diagramm:



Energiebilanz beim β -Zerfall

- Vor dem Zerfall - A_ZX :

$$E = m_{Z,N}c^2$$

Energiebilanz beim β -Zerfall

- Vor dem Zerfall - A_ZX :

$$E = m_{Z,N}c^2 = (Zm_p + Nm_n)c^2 + E_b(Z, N).$$

- $m_{Z,N}$: Masse eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen.

Energiebilanz beim β -Zerfall

- Vor dem Zerfall - A_ZX :

$$E = m_{Z,N}c^2 = (Zm_p + Nm_n)c^2 + E_b(Z, N).$$

- $m_{Z,N}$: Masse eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen.
- m_p : Masse eines Protons.

Energiebilanz beim β -Zerfall

- Vor dem Zerfall - A_ZX :

$$E = m_{Z,N}c^2 = (Zm_p + Nm_n)c^2 + E_b(Z, N).$$

- $m_{Z,N}$: Masse eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen.
- m_p : Masse eines Protons.
- m_n : **Masse eines Neutrons.**

Energiebilanz beim β -Zerfall

- Vor dem Zerfall - A_ZX :

$$E = m_{Z,N}c^2 = (Zm_p + Nm_n)c^2 + E_b(Z, N).$$

- $m_{Z,N}$: Masse eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen.
- m_p : Masse eines Protons.
- m_n : Masse eines Neutrons.
- $E_b(Z, N)$: Bindungsenergie eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen.

Energiebilanz beim β -Zerfall

- Vor dem Zerfall - A_ZX :

$$E = m_{Z,N}c^2 = (Zm_p + Nm_n)c^2 + E_b(Z, N).$$

- $m_{Z,N}$: Masse eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen.
 - m_p : Masse eines Protons.
 - m_n : Masse eines Neutrons.
 - $E_b(Z, N)$: Bindungsenergie eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen.
- Nach dem Zerfall - ${}_{Z+1}^AX + e^- + \bar{\nu}_e$:

$$E' = (m_{Z+1,N-1} + m_e + m_{\nu_e})c^2 = [(Z+1)m_p + (N-1)m_n + m_e + m_{\nu_e}]c^2 + E_b(Z+1, N-1).$$

Energiebilanz beim β -Zerfall

- Vor dem Zerfall - A_ZX :

$$E = m_{Z,N}c^2 = (Zm_p + Nm_n)c^2 + E_b(Z, N).$$

- $m_{Z,N}$: Masse eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen.
 - m_p : Masse eines Protons.
 - m_n : Masse eines Neutrons.
 - $E_b(Z, N)$: Bindungsenergie eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen.
- Nach dem Zerfall - ${}_{Z+1}^AX + e^- + \bar{\nu}_e$:

$$E' = (m_{Z+1,N-1} + m_e + m_{\nu_e})c^2 = [(Z+1)m_p + (N-1)m_n + m_e + m_{\nu_e}]c^2 + E_b(Z+1, N-1).$$

- m_e : Masse eines Elektrons.

Energiebilanz beim β -Zerfall

- Vor dem Zerfall - A_ZX :

$$E = m_{Z,N}c^2 = (Zm_p + Nm_n)c^2 + E_b(Z, N).$$

- $m_{Z,N}$: Masse eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen.
- m_p : Masse eines Protons.
- m_n : Masse eines Neutrons.
- $E_b(Z, N)$: Bindungsenergie eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen.
- Nach dem Zerfall - ${}_{Z+1}^AX + e^- + \bar{\nu}_e$:

$$E' = (m_{Z+1,N-1} + m_e + m_{\nu_e})c^2 = [(Z+1)m_p + (N-1)m_n + m_e + m_{\nu_e}]c^2 + E_b(Z+1, N-1).$$

- m_e : Masse eines Elektrons.
- m_{ν_e} : Masse eines Elektron-Neutrinos.

Energiebilanz beim β -Zerfall

- Vor dem Zerfall - A_ZX :

$$E = m_{Z,N}c^2 = (Zm_p + Nm_n)c^2 + E_b(Z, N).$$

- $m_{Z,N}$: Masse eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen.
 - m_p : Masse eines Protons.
 - m_n : Masse eines Neutrons.
 - $E_b(Z, N)$: Bindungsenergie eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen.
- Nach dem Zerfall - ${}_{Z+1}^AX + e^- + \bar{\nu}_e$:

$$E' = (m_{Z+1,N-1} + m_e + m_{\nu_e})c^2 = [(Z+1)m_p + (N-1)m_n + m_e + m_{\nu_e}]c^2 + E_b(Z+1, N-1).$$

- m_e : Masse eines Elektrons.
 - m_{ν_e} : Masse eines Elektron-Neutrinos.
- Zerfall energetisch erlaubt wenn $E > E'$:

$$E - E' = (m_n - m_p - m_e - m_{\nu_e})c^2 + E_b(Z, N) - E_b(Z+1, N-1) > 0.$$

- Bethe-Weizsäcker-Formel für Bindungsenergie im Tröpfchenmodell (empirisch):

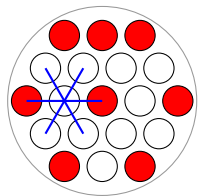
$$E_b = -a_V A + a_O A^{2/3} + a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_S \frac{(Z-N)^2}{4A} - a_P \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{2A^{1/2}}.$$

Bindungsenergie und Bethe-Weizsäcker-Formel

- Bethe-Weizsäcker-Formel für Bindungsenergie im Tröpfchenmodell (empirisch):

$$E_b = -a_V A + a_O A^{2/3} + a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_S \frac{(Z-N)^2}{4A} - a_P \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{2A^{1/2}}.$$

- Bedeutung der Terme in der Bethe-Weizsäcker-Formel:
 - **Volumen:** $\sim A$ Nukleonen vollständig von anderen umgeben; $a_V \approx 15.67\text{MeV}$.

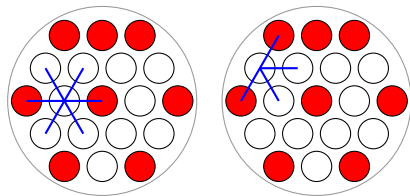


Bindungsenergie und Bethe-Weizsäcker-Formel

- Bethe-Weizsäcker-Formel für Bindungsenergie im Tröpfchenmodell (empirisch):

$$E_b = -a_v A + a_o A^{2/3} + a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_s \frac{(Z-N)^2}{4A} - a_p \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{2A^{1/2}}.$$

- Bedeutung der Terme in der Bethe-Weizsäcker-Formel:
 - Volumen: $\sim A$ Nukleonen vollständig von anderen umgeben; $a_v \approx 15.67\text{MeV}$.
 - Oberfläche: $\sim A^{2/3}$ Nukleonen an der Oberfläche; $a_o \approx 17.23\text{MeV}$.



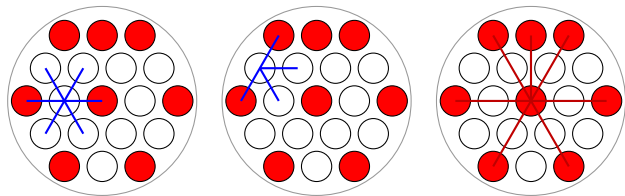
Bindungsenergie und Bethe-Weizsäcker-Formel

- Bethe-Weizsäcker-Formel für Bindungsenergie im Tröpfchenmodell (empirisch):

$$E_b = -a_v A + a_o A^{2/3} + a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_s \frac{(Z-N)^2}{4A} - a_p \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{2A^{1/2}}.$$

- Bedeutung der Terme in der Bethe-Weizsäcker-Formel:

- Volumen: $\sim A$ Nukleonen vollständig von anderen umgeben; $a_v \approx 15.67\text{MeV}$.
- Oberfläche: $\sim A^{2/3}$ Nukleonen an der Oberfläche; $a_o \approx 17.23\text{MeV}$.
- Coulomb: $\sim Z(Z-1)$ abstoßende Coulomb-Potentiale $\sim A^{-1/3}$; $a_c \approx 0.714\text{MeV}$.



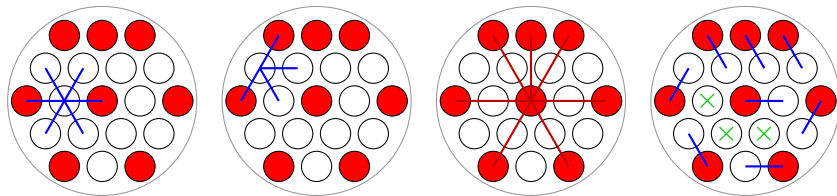
Bindungsenergie und Bethe-Weizsäcker-Formel

- Bethe-Weizsäcker-Formel für Bindungsenergie im Tröpfchenmodell (empirisch):

$$E_b = -a_v A + a_o A^{2/3} + a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_s \frac{(Z-N)^2}{4A} - a_p \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{2A^{1/2}}.$$

- Bedeutung der Terme in der Bethe-Weizsäcker-Formel:

- Volumen: $\sim A$ Nukleonen vollständig von anderen umgeben; $a_v \approx 15.67 \text{ MeV}$.
- Oberfläche: $\sim A^{2/3}$ Nukleonen an der Oberfläche; $a_o \approx 17.23 \text{ MeV}$.
- Coulomb: $\sim Z(Z-1)$ abstoßende Coulomb-Potentiale $\sim A^{-1/3}$; $a_c \approx 0.714 \text{ MeV}$.
- **Symmetrie: Protonen-/Neutronenüberschuss** $\sim (Z-N)^2 A^{-1}$; $a_s \approx 93.15 \text{ MeV}$.



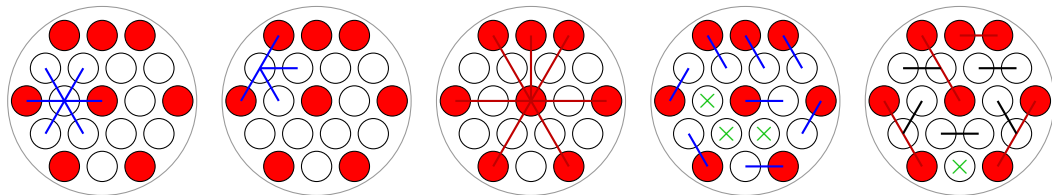
Bindungsenergie und Bethe-Weizsäcker-Formel

- Bethe-Weizsäcker-Formel für Bindungsenergie im Tröpfchenmodell (empirisch):

$$E_b = -a_v A + a_o A^{2/3} + a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_s \frac{(Z-N)^2}{4A} - a_p \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{2A^{1/2}}.$$

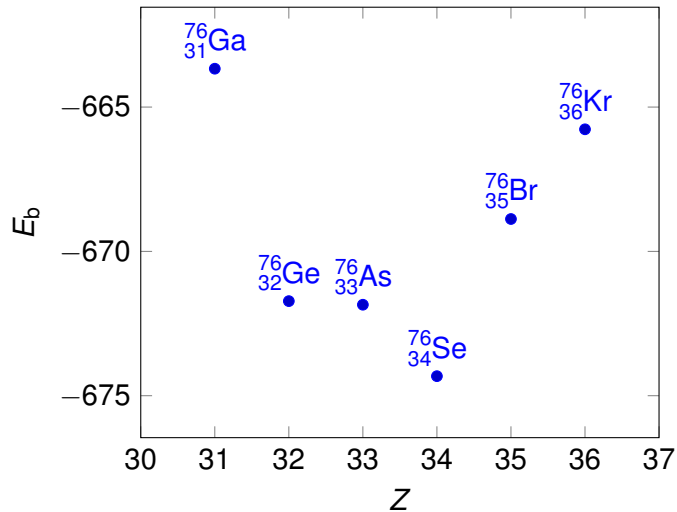
- Bedeutung der Terme in der Bethe-Weizsäcker-Formel:

- Volumen: $\sim A$ Nukleonen vollständig von anderen umgeben; $a_v \approx 15.67 \text{ MeV}$.
- Oberfläche: $\sim A^{2/3}$ Nukleonen an der Oberfläche; $a_o \approx 17.23 \text{ MeV}$.
- Coulomb: $\sim Z(Z-1)$ abstoßende Coulomb-Potentiale $\sim A^{-1/3}$; $a_c \approx 0.714 \text{ MeV}$.
- Symmetrie: Protonen-/Neutronenüberschuss $\sim (Z-N)^2 A^{-1}$; $a_s \approx 93.15 \text{ MeV}$.
- Paarung: stärkere Bindung für Nukleonen in Paaren $\sim A^{-1/2}$; $a_p \approx 11.2 \text{ MeV}$.



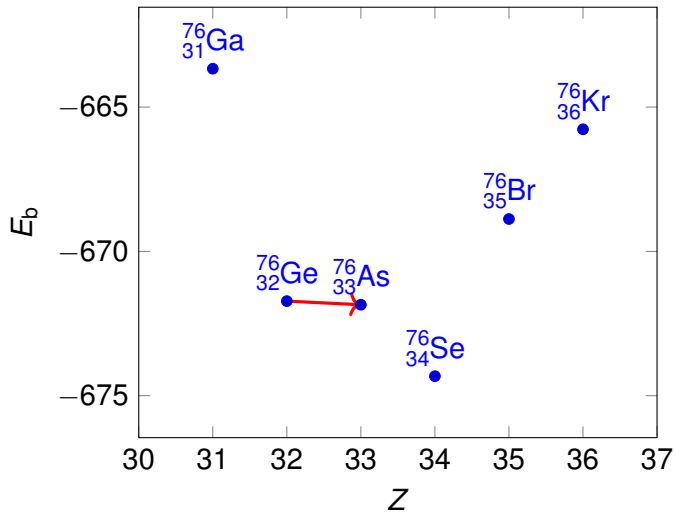
Der Doppel- β -Zerfall

Bindungsenergie für $A = 76$



Der Doppel- β -Zerfall

Bindungsenergie für $A = 76$

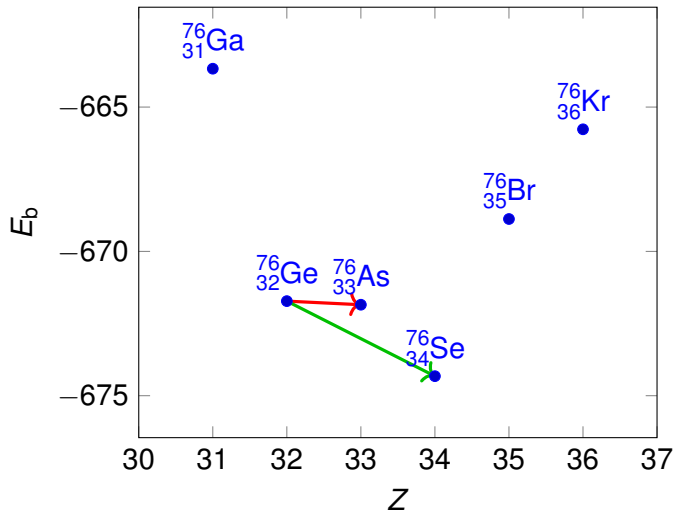


- Nicht möglich:



Der Doppel- β -Zerfall

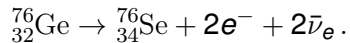
Bindungsenergie für $A = 76$



- Nicht möglich:



- Möglich, $T_{1/2} \approx 1.9 \cdot 10^{21} \text{ a}$:



- Das Wu-Experiment:

- Beobachtung des Zerfalls ${}_{27}^{60}\text{Co} \longrightarrow {}_{28}^{60}\text{Ni} + e^{-} + \bar{\nu}_e$.
- Ausrichtung der Kernspins durch Magnetfeld: +5 für ${}_{27}^{60}\text{Co}$, +4 für ${}_{28}^{60}\text{Ni}$.
- ⇒ Spins von Elektron und Neutrino jeweils $+\frac{1}{2}$.
- Ergebnis: Antineutrino wird immer parallel zum Spin emittiert.
- ⇒ Antineutrino ist immer rechtshändig (und Neutrino linkshändig).

- Das Wu-Experiment:

- Beobachtung des Zerfalls ${}_{27}^{60}\text{Co} \longrightarrow {}_{28}^{60}\text{Ni} + e^{-} + \bar{\nu}_e$.
- Ausrichtung der Kernspins durch Magnetfeld: +5 für ${}_{27}^{60}\text{Co}$, +4 für ${}_{28}^{60}\text{Ni}$.
- ⇒ Spins von Elektron und Neutrino jeweils $+\frac{1}{2}$.
- Ergebnis: Antineutrino wird immer parallel zum Spin emittiert.
- ⇒ Antineutrino ist immer rechtshändig (und Neutrino linkshändig).

- ⇒ Eigenschaften der schwachen Wechselwirkung:

- Schwache Wechselwirkung erzeugt nur (Anti-)Neutrinos *einer* Chiralität.
- Schwache Wechselwirkung nicht symmetrisch unter Paritätstransformation.

- Das Wu-Experiment:

- Beobachtung des Zerfalls ${}_{27}^{60}\text{Co} \longrightarrow {}_{28}^{60}\text{Ni} + e^{-} + \bar{\nu}_e$.
- Ausrichtung der Kernspins durch Magnetfeld: +5 für ${}_{27}^{60}\text{Co}$, +4 für ${}_{28}^{60}\text{Ni}$.
- ⇒ Spins von Elektron und Neutrino jeweils $+\frac{1}{2}$.
- Ergebnis: Antineutrino wird immer parallel zum Spin emittiert.
- ⇒ Antineutrino ist immer rechtshändig (und Neutrino linkshändig).

- ⇒ Eigenschaften der schwachen Wechselwirkung:

- Schwache Wechselwirkung erzeugt nur (Anti-)Neutrinos *einer* Chiralität.
- Schwache Wechselwirkung nicht symmetrisch unter Paritätstransformation.

- Mögliche Interpretationen:

- Neutrinos und Antineutrinos haben nur je eine definite Chiralität.
- Neutrinos mit “falscher” Chiralität sind “steril”: keine WW.
- Neutrino = Antineutrino, Chiralität verknüpft mit Teilchencharakter.

- Das Wu-Experiment:

- Beobachtung des Zerfalls ${}^{60}_{27}\text{Co} \longrightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni} + e^{-} + \bar{\nu}_e$.
- Ausrichtung der Kernspins durch Magnetfeld: +5 für ${}^{60}_{27}\text{Co}$, +4 für ${}^{60}_{28}\text{Ni}$.
- ⇒ Spins von Elektron und Neutrino jeweils $+\frac{1}{2}$.
- Ergebnis: Antineutrino wird immer parallel zum Spin emittiert.
- ⇒ Antineutrino ist immer rechtshändig (und Neutrino linkshändig).

- ⇒ Eigenschaften der schwachen Wechselwirkung:

- Schwache Wechselwirkung erzeugt nur (Anti-)Neutrinos *einer* Chiralität.
- Schwache Wechselwirkung nicht symmetrisch unter Paritätstransformation.

- Mögliche Interpretationen:

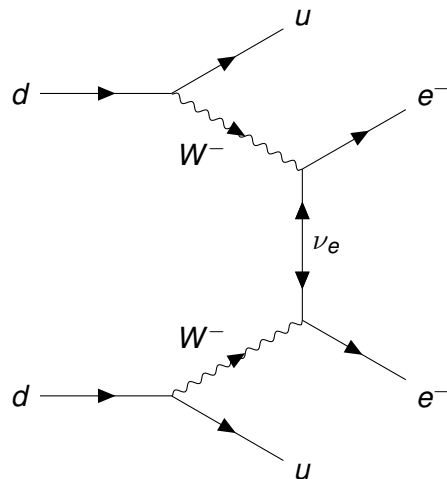
- Neutrinos und Antineutrinos haben nur je eine definite Chiralität.
- Neutrinos mit “falscher” Chiralität sind “steril”: keine WW.
- **Neutrino = Antineutrino, Chiralität verknüpft mit Teilchencharakter.**

- Hypothese: Neutrino = Antineutrino?
 - + Elektrische Ladung = 0.
 - Unterschiedlich bzgl. schwacher WW.
 - Unterschiedliche Leptonenzahl.

- Hypothese: Neutrino = Antineutrino?
 - + Elektrische Ladung = 0.
 - Unterschiedlich bzgl. schwacher WW.
 - Unterschiedliche Leptonenzahl.
- ⇒ Auslöschung zweier Neutrinos möglich.

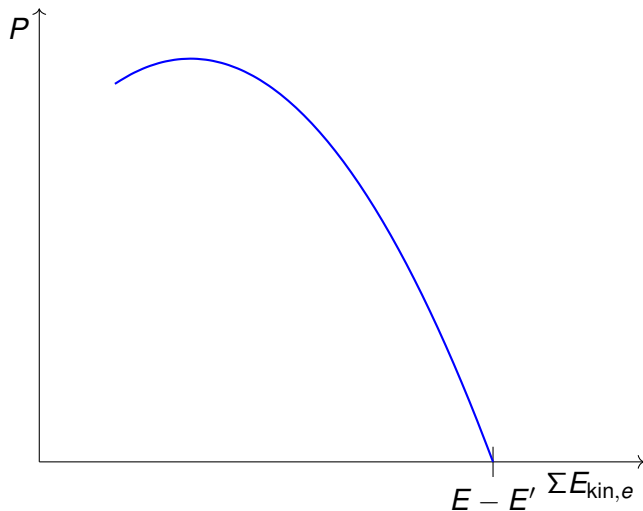
Der neutrinolose Doppel- β -Zerfall

- Hypothese: Neutrino = Antineutrino?
 - + Elektrische Ladung = 0.
 - Unterschiedlich bzgl. schwacher WW.
 - Unterschiedliche Leptonenzahl.
- ⇒ Auslöschung zweier Neutrinos möglich.
- ⇒ Neutrinoloser Doppel- β -Zerfall.



- Energiebilanz:
 - 2ν -doppel- β -Zerfall:

$$E - E' = \Sigma E_{\text{kin},e} + \Sigma E_{\text{kin},\nu}.$$



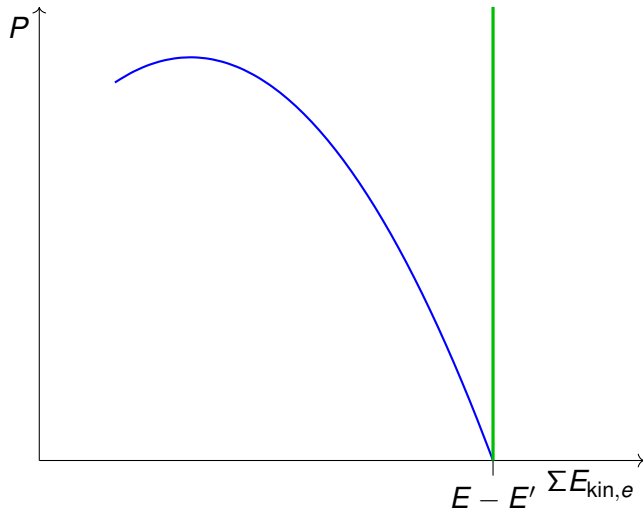
- Energiebilanz:

- 2ν -doppel- β -Zerfall:

$$E - E' = \Sigma E_{\text{kin},e} + \Sigma E_{\text{kin},\nu}.$$

- 0ν -doppel- β -Zerfall:

$$E - E' = \Sigma E_{\text{kin},e}.$$



- Energiebilanz:

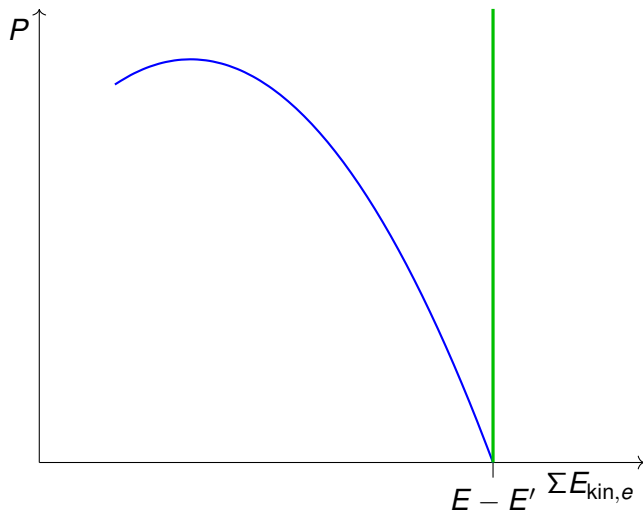
- 2ν -doppel- β -Zerfall:

$$E - E' = \Sigma E_{\text{kin},e} + \Sigma E_{\text{kin},\nu}.$$

- 0ν -doppel- β -Zerfall:

$$E - E' = \Sigma E_{\text{kin},e}.$$

⇒ Experimentell unterscheidbar.



- 1 Der Doppel- β -Zerfall
- 2 Dirac- und Majorana-Teilchen**
- 3 Das Neutrino im Standardmodell
- 4 Jenseits des Standardmodells: massive Neutrinos
- 5 Zusammenfassung

- Vektorraum $V = \mathbb{R}^{p+q}$ mit Basis (γ^a) und symmetrischer Bilinearform

$$\eta = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q).$$

- Vektorraum $V = \mathbb{R}^{p+q}$ mit Basis (γ^a) und symmetrischer Bilinearform

$$\eta = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q).$$

- Clifford-Algebra: Quotient aus freier Tensoralgebra und Ideal:

$$\text{Cl}_{p,q} = [\mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) + \dots] / [v \otimes v - \eta(v, v)\mathbb{1}].$$

- Vektorraum $V = \mathbb{R}^{p+q}$ mit Basis (γ^a) und symmetrischer Bilinearform

$$\eta = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q).$$

- Clifford-Algebra: Quotient aus freier Tensoralgebra und Ideal:

$$\text{Cl}_{p,q} = [\mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) + \dots] / [v \otimes v - \eta(v, v)\mathbb{1}].$$

⇒ Clifford-Algebra $\text{Cl}_{p,q}$ hat Dimension 2^{p+q} und Basis

$$\left\{ \mathbb{1}, \gamma^a, \gamma^{[a_1 a_2]}, \dots, \gamma^{[a_1 \dots a_{p+q}]} \right\}.$$

- Vektorraum $V = \mathbb{R}^{p+q}$ mit Basis (γ^a) und symmetrischer Bilinearform

$$\eta = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q).$$

- Clifford-Algebra: Quotient aus freier Tensoralgebra und Ideal:

$$\text{Cl}_{p,q} = [\mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) + \dots] / [v \otimes v - \eta(v, v)\mathbb{1}].$$

⇒ Clifford-Algebra $\text{Cl}_{p,q}$ hat Dimension 2^{p+q} und Basis

$$\left\{ \mathbb{1}, \gamma^a, \gamma^{[a_1 a_2]}, \dots, \gamma^{[a_1 \dots a_{p+q}]} \right\}.$$

⇒ Graduierte Algebra mit Unterräumen $\text{Cl}_{p,q}^k \ni \{\gamma^{[a_1 \dots a_k]}\}.$

- Vektorraum $V = \mathbb{R}^{p+q}$ mit Basis (γ^a) und symmetrischer Bilinearform

$$\eta = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q).$$

- Clifford-Algebra: Quotient aus freier Tensoralgebra und Ideal:

$$\text{Cl}_{p,q} = [\mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) + \dots] / [v \otimes v - \eta(v, v)\mathbb{1}].$$

⇒ Clifford-Algebra $\text{Cl}_{p,q}$ hat Dimension 2^{p+q} und Basis

$$\left\{ \mathbb{1}, \gamma^a, \gamma^{[a_1 a_2]}, \dots, \gamma^{[a_1 \dots a_{p+q}]} \right\}.$$

⇒ Graduierte Algebra mit Unterräumen $\text{Cl}_{p,q}^k \ni \{\gamma^{[a_1 \dots a_k]}\}$.

⇒ Komplexifizierte Algebra $\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}} = \text{Cl}_{p,q} \otimes \mathbb{C}$ nur von $p + q$ abhängig.

- Vektorraum $V = \mathbb{R}^{p+q}$ mit Basis (γ^a) und symmetrischer Bilinearform

$$\eta = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q).$$

- Clifford-Algebra: Quotient aus freier Tensoralgebra und Ideal:

$$\text{Cl}_{p,q} = [\mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) + \dots] / [v \otimes v - \eta(v, v)\mathbb{1}].$$

⇒ Clifford-Algebra $\text{Cl}_{p,q}$ hat Dimension 2^{p+q} und Basis

$$\left\{ \mathbb{1}, \gamma^a, \gamma^{[a_1 a_2]}, \dots, \gamma^{[a_1 \dots a_{p+q}]} \right\}.$$

⇒ Graduierte Algebra mit Unterräumen $\text{Cl}_{p,q}^k \ni \{\gamma^{[a_1 \dots a_k]}\}.$

⇒ Komplexifizierte Algebra $\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}} = \text{Cl}_{p,q} \otimes \mathbb{C}$ nur von $p+q$ abhängig.

⇒ $\text{Cl}_{p,q} \not\cong \text{Cl}_{q,p}$ für $p \neq q$.

- Pin-Gruppe erzeugt von normierten Elementen des Vektorraums:

$$\text{Pin}(\rho, q) = \{v_1 \cdots v_k, v_i \in V, |\eta(v_i, v_i)| = 1\}.$$

- Pin-Gruppe erzeugt von normierten Elementen des Vektorraums:

$$\text{Pin}(p, q) = \{v_1 \cdots v_k, v_i \in V, |\eta(v_i, v_i)| = 1\}.$$

- Spin-Gruppe enthält nur gerade Elemente:

$$\text{Spin}(p, q) = \text{Pin}(p, q) \cap [\text{Cl}_{p,q}^0 \oplus \text{Cl}_{p,q}^2 \oplus \text{Cl}_{p,q}^4 \oplus \dots].$$

- Pin-Gruppe erzeugt von normierten Elementen des Vektorraums:

$$\text{Pin}(p, q) = \{v_1 \cdots v_k, v_i \in V, |\eta(v_i, v_i)| = 1\}.$$

- Spin-Gruppe enthält nur gerade Elemente:

$$\text{Spin}(p, q) = \text{Pin}(p, q) \cap [\text{Cl}_{p,q}^0 \oplus \text{Cl}_{p,q}^2 \oplus \text{Cl}_{p,q}^4 \oplus \dots].$$

- Definiere $(v_1 \dots v_k)^* = [(-v_k) \cdots (-v_1)]$.

- Pin-Gruppe erzeugt von normierten Elementen des Vektorraums:

$$\text{Pin}(p, q) = \{v_1 \cdots v_k, v_i \in V, |\eta(v_i, v_i)| = 1\}.$$

- Spin-Gruppe enthält nur gerade Elemente:

$$\text{Spin}(p, q) = \text{Pin}(p, q) \cap [\text{Cl}_{p,q}^0 \oplus \text{Cl}_{p,q}^2 \oplus \text{Cl}_{p,q}^4 \oplus \dots].$$

- Definiere $(v_1 \dots v_k)^* = [(-v_k) \cdots (-v_1)]$.

⇒ $\text{Pin}(p, q)$ (und daher auch $\text{Spin}(p, q)$) wirkt auf V und erhält η :

$$(g, v) \mapsto gvg^*, \quad \eta(gvg^*, gwg^*) = \eta(v, w).$$

- Pin-Gruppe erzeugt von normierten Elementen des Vektorraums:

$$\text{Pin}(p, q) = \{v_1 \cdots v_k, v_i \in V, |\eta(v_i, v_i)| = 1\}.$$

- Spin-Gruppe enthält nur gerade Elemente:

$$\text{Spin}(p, q) = \text{Pin}(p, q) \cap [\text{Cl}_{p,q}^0 \oplus \text{Cl}_{p,q}^2 \oplus \text{Cl}_{p,q}^4 \oplus \dots].$$

- Definiere $(v_1 \dots v_k)^* = [(-v_k) \cdots (-v_1)]$.

⇒ $\text{Pin}(p, q)$ (und daher auch $\text{Spin}(p, q)$) wirkt auf V und erhält η :

$$(g, v) \mapsto gvg^*, \quad \eta(gvg^*, gwg^*) = \eta(v, w).$$

⇒ Doppelte Überdeckung der (speziellen) orthogonalen Gruppe:

$$\text{Pin}(p, q) \rightarrow \text{O}(p, q), \quad \text{Spin}(p, q) \rightarrow \text{SO}_0(p, q).$$

- Dirac-Darstellung \mathcal{D}_{p+q} : kleinste komplexe Darstellung von $\mathrm{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}}$.

- Dirac-Darstellung \mathcal{D}_{p+q} : kleinste komplexe Darstellung von $\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}}$.
- Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\text{Cl}_4^{\mathbb{C}} \cong M_4(\mathbb{C})$.

- Dirac-Darstellung \mathcal{D}_{p+q} : kleinste komplexe Darstellung von $\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}}$.
 - Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\text{Cl}_4^{\mathbb{C}} \cong M_4(\mathbb{C})$.
- \Rightarrow Dirac-Darstellung: $\mathcal{D}_4 : \text{Cl}_4^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^4)$.

- Dirac-Darstellung \mathcal{D}_{p+q} : kleinste komplexe Darstellung von $\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}}$.
- Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\text{Cl}_4^{\mathbb{C}} \cong M_4(\mathbb{C})$.
- ⇒ Dirac-Darstellung: $\mathcal{D}_4 : \text{Cl}_4^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^4)$.
- ⇒ Induzierte Darstellung der Spingruppe durch Inklusion:

$$\text{Spin}(3, 1) \subset \text{Cl}_{3,1} \subset \text{Cl}_4^{\mathbb{C}}.$$

- Dirac-Darstellung \mathcal{D}_{p+q} : kleinste komplexe Darstellung von $\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}}$.
- Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\text{Cl}_4^{\mathbb{C}} \cong M_4(\mathbb{C})$.
- ⇒ Dirac-Darstellung: $\mathcal{D}_4 : \text{Cl}_4^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^4)$.
- ⇒ Induzierte Darstellung der Spingruppe durch Inklusion:

$$\text{Spin}(3, 1) \subset \text{Cl}_{3,1} \subset \text{Cl}_4^{\mathbb{C}}.$$

- In diesem Fall: $\text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$ und $\text{Spin}(3, 1) \cong \text{SL}(2, \mathbb{C})$.

- Dirac-Darstellung \mathcal{D}_{p+q} : kleinste komplexe Darstellung von $\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}}$.
- Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\text{Cl}_4^{\mathbb{C}} \cong M_4(\mathbb{C})$.
- ⇒ Dirac-Darstellung: $\mathcal{D}_4 : \text{Cl}_4^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^4)$.
- ⇒ Induzierte Darstellung der Spingruppe durch Inklusion:

$$\text{Spin}(3, 1) \subset \text{Cl}_{3,1} \subset \text{Cl}_4^{\mathbb{C}}.$$

- In diesem Fall: $\text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$ und $\text{Spin}(3, 1) \cong \text{SL}(2, \mathbb{C})$.
- ⇒ Dirac-Darstellung der Spingruppe: $\mathcal{D}_{3,1} = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

- Dirac-Darstellung \mathcal{D}_{p+q} : kleinste komplexe Darstellung von $\text{Cl}_{p+q}^{\mathbb{C}}$.
- Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\text{Cl}_4^{\mathbb{C}} \cong M_4(\mathbb{C})$.
- ⇒ Dirac-Darstellung: $\mathcal{D}_4 : \text{Cl}_4^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^4)$.
- ⇒ Induzierte Darstellung der Spingruppe durch Inklusion:

$$\text{Spin}(3, 1) \subset \text{Cl}_{3,1} \subset \text{Cl}_4^{\mathbb{C}}.$$

- In diesem Fall: $\text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$ und $\text{Spin}(3, 1) \cong \text{SL}(2, \mathbb{C})$.
- ⇒ Dirac-Darstellung der Spingruppe: $\mathcal{D}_{3,1} = (\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$.
- ⇒ Dirac-Spinor: $\psi : M \rightarrow \mathbb{C}^4$.

- Dirac-Darstellung $\mathcal{D}_{p,q}$ von $\text{Spin}(p, q)$ nicht irreduzibel für $p + q \in 2\mathbb{Z}$.

- Dirac-Darstellung $\mathcal{D}_{p,q}$ von $\text{Spin}(p, q)$ nicht irreduzibel für $p + q \in 2\mathbb{Z}$.
- Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\mathcal{D}_{3,1} = (\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$.

- Dirac-Darstellung $\mathcal{D}_{p,q}$ von $\text{Spin}(p, q)$ nicht irreduzibel für $p + q \in 2\mathbb{Z}$.
- Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\mathcal{D}_{3,1} = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$.
- Weyl-Darstellungen: irreduzible Unterdarstellungen der Dirac-Darstellung:

$$\mathcal{W}_{3,1}^L = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad \mathcal{W}_{3,1}^R = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Parität und Weyl-Darstellung

- Dirac-Darstellung $\mathcal{D}_{p,q}$ von $\text{Spin}(p, q)$ nicht irreduzibel für $p + q \in 2\mathbb{Z}$.
- Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\mathcal{D}_{3,1} = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$.
- Weyl-Darstellungen: irreduzible Unterdarstellungen der Dirac-Darstellung:

$$\mathcal{W}_{3,1}^{\text{L}} = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad \mathcal{W}_{3,1}^{\text{R}} = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

- Explizite Konstruktion mit Hilfe der “fünften Gamma-Matrix” $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$:
 - $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \Rightarrow$ Eigenwerte von γ^5 sind ± 1 .
 - γ^5 kommutiert mit $\text{Spin}(3, 1)$, $g\gamma^5 = \gamma^5g$ für $g \in \text{Spin}(3, 1)$.
- \Rightarrow Eigenräume von γ^5 bilden Unterdarstellungen von $\text{Spin}(3, 1) \cong \text{SL}(2, \mathbb{C})$:

$$\mathcal{W}_{3,1}^{\text{L}}(g) = g, \quad \mathcal{W}_{3,1}^{\text{R}}(g) = (g^*)^{-1}.$$

\Rightarrow Links- und rechtshändige Weyl-Spinoren:

$$\psi_{\text{L}} = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}\psi, \quad \psi_{\text{R}} = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2}\psi.$$

Beispiel: chirale Zerlegung der Dirac-Wirkung

- Dirac-Wirkung: $\bar{\psi}(i\gamma^a\partial_a - m)\psi$.

Beispiel: chirale Zerlegung der Dirac-Wirkung

- Dirac-Wirkung: $\bar{\psi}(i\gamma^a\partial_a - m)\psi$.
- Konjugierter Spinor: $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.

Beispiel: chirale Zerlegung der Dirac-Wirkung

- Dirac-Wirkung: $\bar{\psi}(i\gamma^a\partial_a - m)\psi$.
- Konjugierter Spinor: $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.
- Zerlegung des Dirac-Spinors in zwei Weyl-Spinoren:

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad \psi_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}\psi, \quad \psi_R = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2}\psi.$$

Beispiel: chirale Zerlegung der Dirac-Wirkung

- Dirac-Wirkung: $\bar{\psi}(i\gamma^a\partial_a - m)\psi$.
- Konjugierter Spinor: $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.
- Zerlegung des Dirac-Spinors in zwei Weyl-Spinoren:

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad \psi_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}\psi, \quad \psi_R = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2}\psi.$$

- Benutze $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$ und $\gamma^a\gamma^5 + \gamma^5\gamma^a = 0$ zur Zerlegung von $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R, \quad \bar{\psi}_L = \psi^\dagger \frac{\mathbb{1} + (\gamma^5)^\dagger}{2} \gamma^0 = \bar{\psi} \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2}, \quad \bar{\psi}_R = \psi^\dagger \frac{\mathbb{1} - (\gamma^5)^\dagger}{2} \gamma^0 = \bar{\psi} \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}.$$

Beispiel: chirale Zerlegung der Dirac-Wirkung

- Dirac-Wirkung: $\bar{\psi}(i\gamma^a\partial_a - m)\psi$.
- Konjugierter Spinor: $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.
- Zerlegung des Dirac-Spinors in zwei Weyl-Spinoren:

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad \psi_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}\psi, \quad \psi_R = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2}\psi.$$

- Benutze $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$ und $\gamma^a\gamma^5 + \gamma^5\gamma^a = 0$ zur Zerlegung von $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R, \quad \bar{\psi}_L = \psi^\dagger \frac{\mathbb{1} + (\gamma^5)^\dagger}{2} \gamma^0 = \bar{\psi} \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2}, \quad \bar{\psi}_R = \psi^\dagger \frac{\mathbb{1} - (\gamma^5)^\dagger}{2} \gamma^0 = \bar{\psi} \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}.$$

- Setze Zerlegung in Dirac-Wirkung ein und benutze $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$:

$$\bar{\psi}(i\gamma^a\partial_a - m)\psi = \bar{\psi}_L i\gamma^a\partial_a\psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^a\partial_a\psi_R - m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L).$$

Beispiel: chirale Zerlegung der Dirac-Wirkung

- Dirac-Wirkung: $\bar{\psi}(i\gamma^a\partial_a - m)\psi$.
- Konjugierter Spinor: $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.
- Zerlegung des Dirac-Spinors in zwei Weyl-Spinoren:

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad \psi_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}\psi, \quad \psi_R = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2}\psi.$$

- Benutze $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$ und $\gamma^a\gamma^5 + \gamma^5\gamma^a = 0$ zur Zerlegung von $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R, \quad \bar{\psi}_L = \psi^\dagger \frac{\mathbb{1} + (\gamma^5)^\dagger}{2} \gamma^0 = \bar{\psi} \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2}, \quad \bar{\psi}_R = \psi^\dagger \frac{\mathbb{1} - (\gamma^5)^\dagger}{2} \gamma^0 = \bar{\psi} \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}.$$

- Setze Zerlegung in Dirac-Wirkung ein und benutze $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$:

$$\bar{\psi}(i\gamma^a\partial_a - m)\psi = \bar{\psi}_L i\gamma^a\partial_a\psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^a\partial_a\psi_R - m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L).$$

⇒ **Massenterm mischt links- und rechtshändige Komponenten.**

Beispiel: chirale Zerlegung der Dirac-Wirkung

- Dirac-Wirkung: $\bar{\psi}(i\gamma^a\partial_a - m)\psi$.
- Konjugierter Spinor: $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.
- Zerlegung des Dirac-Spinors in zwei Weyl-Spinoren:

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad \psi_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}\psi, \quad \psi_R = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2}\psi.$$

- Benutze $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$ und $\gamma^a\gamma^5 + \gamma^5\gamma^a = 0$ zur Zerlegung von $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R, \quad \bar{\psi}_L = \psi^\dagger \frac{\mathbb{1} + (\gamma^5)^\dagger}{2} \gamma^0 = \bar{\psi} \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2}, \quad \bar{\psi}_R = \psi^\dagger \frac{\mathbb{1} - (\gamma^5)^\dagger}{2} \gamma^0 = \bar{\psi} \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}.$$

- Setze Zerlegung in Dirac-Wirkung ein und benutze $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$:

$$\bar{\psi}(i\gamma^a\partial_a - m)\psi = \bar{\psi}_L i\gamma^a\partial_a\psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^a\partial_a\psi_R - m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L).$$

⇒ Massenterm mischt links- und rechtshändige Komponenten.

⇒ Reiner Weyl-Spinor (nur L oder nur R) ist zwangsläufig masselos.

Helizität

- Projektion des Spins $\vec{\sigma}$ auf Impuls \vec{p} :

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \psi = h \psi .$$

Chiralität

Helizität

- Projektion des Spins $\vec{\sigma}$ auf Impuls \vec{p} :

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \psi = h \psi .$$

⇒ *Nicht* Lorentz-invariant.

Chiralität

- Richtung des Impulsvektors ändert sich durch Lorentz-Boost (“Überholen”).

Der Unterschied zwischen Helizität und Chiralität

Helizität

- Projektion des Spins $\vec{\sigma}$ auf Impuls \vec{p} :

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \psi = h \psi .$$

⇒ *Nicht* Lorentz-invariant.

⇒ **Erhaltungsgröße für freies Teilchen.**

- Richtung des Impulsvektors ändert sich durch Lorentz-Boost (“Überholen”).
- **Helizitätsoperator kommutiert mit Hamilton-Operator des freien Teilchens.**

Chiralität

Der Unterschied zwischen Helizität und Chiralität

Helizität

- Projektion des Spins $\vec{\sigma}$ auf Impuls \vec{p} :

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \psi = h \psi .$$

- ⇒ *Nicht* Lorentz-invariant.
- ⇒ Erhaltungsgröße für freies Teilchen.

- Richtung des Impulsvektors ändert sich durch Lorentz-Boost (“Überholen”).
- Helizitätsoperator kommutiert mit Hamilton-Operator des freien Teilchens.

Chiralität

- Eigenzustand von γ^5 zu Eigenwert ± 1 :

$$\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \psi = 0 .$$

Der Unterschied zwischen Helizität und Chiralität

Helizität

- Projektion des Spins $\vec{\sigma}$ auf Impuls \vec{p} :

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \psi = h \psi .$$

- ⇒ *Nicht* Lorentz-invariant.
- ⇒ Erhaltungsgröße für freies Teilchen.

- Richtung des Impulsvektors ändert sich durch Lorentz-Boost (“Überholen”).
- Helizitätsoperator kommutiert mit Hamilton-Operator des freien Teilchens.
- γ^5 **kommutiert mit Lorentz-Transformation.**

Chiralität

- Eigenzustand von γ^5 zu Eigenwert ± 1 :

$$\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \psi = 0 .$$

- ⇒ **Lorentz-invariant.**

Der Unterschied zwischen Helizität und Chiralität

Helizität

- Projektion des Spins $\vec{\sigma}$ auf Impuls \vec{p} :

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \psi = h \psi .$$

- ⇒ *Nicht* Lorentz-invariant.
- ⇒ Erhaltungsgröße für freies Teilchen.

- Richtung des Impulsvektors ändert sich durch Lorentz-Boost (“Überholen”).
- Helizitätsoperator kommutiert mit Hamilton-Operator des freien Teilchens.
- γ^5 kommutiert mit Lorentz-Transformation.
- **Chirale Zustände sind keine Eigenzustände wegen Mischterm $m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)$.**

Chiralität

- Eigenzustand von γ^5 zu Eigenwert ± 1 :

$$\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \psi = 0 .$$

- ⇒ Lorentz-invariant.
- ⇒ **Keine Erhaltungsgröße (i.A.).**

Der Unterschied zwischen Helizität und Chiralität

Helizität

- Projektion des Spins $\vec{\sigma}$ auf Impuls \vec{p} :

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \psi = h \psi .$$

- ⇒ *Nicht* Lorentz-invariant.
- ⇒ Erhaltungsgröße für freies Teilchen.

Chiralität

- Eigenzustand von γ^5 zu Eigenwert ± 1 :

$$\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \psi = 0 .$$

- ⇒ Lorentz-invariant.
- ⇒ *Keine* Erhaltungsgröße (i.A.).

- Richtung des Impulsvektors ändert sich durch Lorentz-Boost (“Überholen”).
- Helizitätsoperator kommutiert mit Hamilton-Operator des freien Teilchens.
- γ^5 kommutiert mit Lorentz-Transformation.
- Chirale Zustände sind keine Eigenzustände wegen Mischterm $m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)$.

⇒ **Masseloses Teilchen: kein “Überholen” und kein Massenterm ⇒ Helizität = Chiralität.**

Die Majorana-Darstellung

- Majorana-Darstellung: kleinste reelle Darstellung $\mathcal{M}_{p,q}$ mit $\mathcal{D}_{p+q} = \mathcal{M}_{p,q} \otimes \mathbb{C}$.

Die Majorana-Darstellung

- Majorana-Darstellung: kleinste reelle Darstellung $\mathcal{M}_{p,q}$ mit $\mathcal{D}_{p+q} = \mathcal{M}_{p,q} \otimes \mathbb{C}$.
- Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$.

Die Majorana-Darstellung

- Majorana-Darstellung: kleinste reelle Darstellung $\mathcal{M}_{p,q}$ mit $\mathcal{D}_{p+q} = \mathcal{M}_{p,q} \otimes \mathbb{C}$.
 - Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$.
- \Rightarrow Majorana-Darstellung: $\mathcal{M}_{3,1} : \text{Cl}_{3,1} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^4)$.

Die Majorana-Darstellung

- Majorana-Darstellung: kleinste reelle Darstellung $\mathcal{M}_{p,q}$ mit $\mathcal{D}_{p+q} = \mathcal{M}_{p,q} \otimes \mathbb{C}$.
 - Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$.
- ⇒ Majorana-Darstellung: $\mathcal{M}_{3,1} : \text{Cl}_{3,1} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^4)$.
- ⇒ Induzierte Darstellung der Spingruppe durch Inklusion:

$$\text{Spin}(3, 1) \subset \text{Cl}_{3,1} .$$

Die Majorana-Darstellung

- Majorana-Darstellung: kleinste reelle Darstellung $\mathcal{M}_{p,q}$ mit $\mathcal{D}_{p+q} = \mathcal{M}_{p,q} \otimes \mathbb{C}$.
 - Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$.
- ⇒ Majorana-Darstellung: $\mathcal{M}_{3,1} : \text{Cl}_{3,1} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^4)$.

⇒ Induzierte Darstellung der Spingruppe durch Inklusion:

$$\text{Spin}(3, 1) \subset \text{Cl}_{3,1} .$$

- Majorana-Darstellung als “Realisierung” der Dirac-Darstellung:
 - Einschränkung auf Spinoren mit reellen Komponenten:

$$\psi = \psi^* .$$

- ⚡ Allgemeine Dirac-Darstellung: reelle Komponenten abhängig von (komplexer) Basis.
- ⇒ Führe antilineare Operation $\psi \mapsto \psi^c$, $(i\psi)^c = -i\psi^c$ ein und definiere Majorana-Teilchen

$$\psi = \psi^c .$$

Die Majorana-Darstellung

- Majorana-Darstellung: kleinste reelle Darstellung $\mathcal{M}_{p,q}$ mit $\mathcal{D}_{p+q} = \mathcal{M}_{p,q} \otimes \mathbb{C}$.
 - Beispiel: $p = 3, q = 1$: $\text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$.
- ⇒ Majorana-Darstellung: $\mathcal{M}_{3,1} : \text{Cl}_{3,1} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^4)$.

⇒ Induzierte Darstellung der Spingruppe durch Inklusion:

$$\text{Spin}(3, 1) \subset \text{Cl}_{3,1} .$$

- Majorana-Darstellung als “Realisierung” der Dirac-Darstellung:
 - Einschränkung auf Spinoren mit reellen Komponenten:

$$\psi = \psi^* .$$

- ⚡ Allgemeine Dirac-Darstellung: reelle Komponenten abhängig von (komplexer) Basis.
- ⇒ Führe antilineare Operation $\psi \mapsto \psi^c$, $(i\psi)^c = -i\psi^c$ ein und definiere Majorana-Teilchen

$$\psi = \psi^c .$$

⇒ $\psi \mapsto \psi^c \hat{=}$ Ladungskonjugation ⇒ Majorana-Teilchen sind ihre eigenen Antiteilchen.

Majorana-Teilchen und Chiralität

- Herleitung in Majorana-Basis:
 - Majorana-Basis: $\psi = \psi^*$ und reelle Matrizen $\gamma^a \in \text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$.

- Herleitung in Majorana-Basis:
 - Majorana-Basis: $\psi = \psi^*$ und reelle Matrizen $\gamma^a \in \text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$.
 - ⇒ Matrix $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ rein imaginär: $(\gamma^5)^* = -\gamma^5$.

- Herleitung in Majorana-Basis:

- Majorana-Basis: $\psi = \psi^*$ und reelle Matrizen $\gamma^a \in \text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$.
- ⇒ Matrix $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ rein imaginär: $(\gamma^5)^* = -\gamma^5$.
- ⇒ Wenn ψ Eigenvektor zum Eigenwert ± 1 von γ^5 ist, dann:

$$\gamma^5\psi^* = -(\gamma^5)^*\psi^* = -(\gamma^5\psi)^* = -(\pm\psi)^* = \mp\psi^* .$$

- Herleitung in Majorana-Basis:

- Majorana-Basis: $\psi = \psi^*$ und reelle Matrizen $\gamma^a \in \text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$.
- ⇒ Matrix $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ rein imaginär: $(\gamma^5)^* = -\gamma^5$.
- ⇒ Wenn ψ Eigenvektor zum Eigenwert ± 1 von γ^5 ist, dann:

$$\gamma^5\psi^* = -(\gamma^5)^*\psi^* = -(\gamma^5\psi)^* = -(\pm\psi)^* = \mp\psi^* .$$

- Formulierung in allgemeiner Basis:

- γ^5 antikommutiert mit Ladungskonjugation: $\gamma^5\psi^c = -(\gamma^5\psi)^c$.

- Herleitung in Majorana-Basis:

- Majorana-Basis: $\psi = \psi^*$ und reelle Matrizen $\gamma^a \in \text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$.
- ⇒ Matrix $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ rein imaginär: $(\gamma^5)^* = -\gamma^5$.
- ⇒ Wenn ψ Eigenvektor zum Eigenwert ± 1 von γ^5 ist, dann:

$$\gamma^5\psi^* = -(\gamma^5)^*\psi^* = -(\gamma^5\psi)^* = -(\pm\psi)^* = \mp\psi^* .$$

- Formulierung in allgemeiner Basis:

- γ^5 antikommutiert mit Ladungskonjugation: $\gamma^5\psi^c = -(\gamma^5\psi)^c$.
- ⇒ Chirale Projektoren und Ladungskonjugation:

$$(\psi^c)_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}\psi^c = (\psi_R)^c, \quad (\psi^c)_R = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2}\psi^c = (\psi_L)^c .$$

- Herleitung in Majorana-Basis:

- Majorana-Basis: $\psi = \psi^*$ und reelle Matrizen $\gamma^a \in \text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$.
- ⇒ Matrix $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ rein imaginär: $(\gamma^5)^* = -\gamma^5$.
- ⇒ Wenn ψ Eigenvektor zum Eigenwert ± 1 von γ^5 ist, dann:

$$\gamma^5\psi^* = -(\gamma^5)^*\psi^* = -(\gamma^5\psi)^* = -(\pm\psi)^* = \mp\psi^* .$$

- Formulierung in allgemeiner Basis:

- γ^5 antikommutiert mit Ladungskonjugation: $\gamma^5\psi^c = -(\gamma^5\psi)^c$.
- ⇒ Chirale Projektoren und Ladungskonjugation:

$$(\psi^c)_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}\psi^c = (\psi_R)^c, \quad (\psi^c)_R = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2}\psi^c = (\psi_L)^c .$$

- ⇒ Majorana-Teilchen $\psi = \psi^c$ können keine Eigenzustände von γ^5 sein.

- Herleitung in Majorana-Basis:

- Majorana-Basis: $\psi = \psi^*$ und reelle Matrizen $\gamma^a \in \text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$.
- ⇒ Matrix $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ rein imaginär: $(\gamma^5)^* = -\gamma^5$.
- ⇒ Wenn ψ Eigenvektor zum Eigenwert ± 1 von γ^5 ist, dann:

$$\gamma^5\psi^* = -(\gamma^5)^*\psi^* = -(\gamma^5\psi)^* = -(\pm\psi)^* = \mp\psi^*.$$

- Formulierung in allgemeiner Basis:

- γ^5 antikommutiert mit Ladungskonjugation: $\gamma^5\psi^c = -(\gamma^5\psi)^c$.
- ⇒ Chirale Projektoren und Ladungskonjugation:

$$(\psi^c)_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}\psi^c = (\psi_R)^c, \quad (\psi^c)_R = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2}\psi^c = (\psi_L)^c.$$

- ⇒ Majorana-Teilchen $\psi = \psi^c$ können keine Eigenzustände von γ^5 sein.
- ⇒ Chirale Zerlegung von Majorana-Teilchen $\psi = \psi^c$:

$$\psi_L = (\psi^c)_L = (\psi_R)^c, \quad \psi_R = (\psi^c)_R = (\psi_L)^c.$$

Majorana-Teilchen und Chiralität

- Herleitung in Majorana-Basis:

- Majorana-Basis: $\psi = \psi^*$ und reelle Matrizen $\gamma^a \in \text{Cl}_{3,1} \cong M_4(\mathbb{R})$.
- ⇒ Matrix $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ rein imaginär: $(\gamma^5)^* = -\gamma^5$.
- ⇒ Wenn ψ Eigenvektor zum Eigenwert ± 1 von γ^5 ist, dann:

$$\gamma^5\psi^* = -(\gamma^5)^*\psi^* = -(\gamma^5\psi)^* = -(\pm\psi)^* = \mp\psi^*.$$

- Formulierung in allgemeiner Basis:

- γ^5 antikommutiert mit Ladungskonjugation: $\gamma^5\psi^c = -(\gamma^5\psi)^c$.
- ⇒ Chirale Projektoren und Ladungskonjugation:

$$(\psi^c)_L = \frac{1 + \gamma^5}{2}\psi^c = (\psi_R)^c, \quad (\psi^c)_R = \frac{1 - \gamma^5}{2}\psi^c = (\psi_L)^c.$$

- ⇒ Majorana-Teilchen $\psi = \psi^c$ können keine Eigenzustände von γ^5 sein.
- ⇒ Chirale Zerlegung von Majorana-Teilchen $\psi = \psi^c$:

$$\psi_L = (\psi^c)_L = (\psi_R)^c, \quad \psi_R = (\psi^c)_R = (\psi_L)^c.$$

- ⇒ Möglicher Massenterm: $-m[\bar{\psi}_L(\psi_L)^c + (\bar{\psi}_L)^c\psi_L]$.

- Weyl-Spinor: 2 komplexe Komponenten.
 - Eigenzustand von γ^5 : wohldefinierte Chiralität.
 - ψ^c beschreibt das Antiteilchen (entgegengesetzte Chiralität).
 - Masseloses Teilchen: Chiralität = Helizität ist Erhaltungsgröße.
 - Teilchen und Antiteilchen unterscheiden sich voneinander.

- Weyl-Spinor: 2 komplexe Komponenten.
 - Eigenzustand von γ^5 : wohldefinierte Chiralität.
 - ψ^c beschreibt das Antiteilchen (entgegengesetzte Chiralität).
 - Masseloses Teilchen: Chiralität = Helizität ist Erhaltungsgröße.
 - Teilchen und Antiteilchen unterscheiden sich voneinander.
- Dirac-Spinor: 4 komplexe Komponenten.
 - Beschreibt je ein Teilchen und Antiteilchen beider Chiralitäten.
 - Teilchen und Antiteilchen unterscheiden sich voneinander.
 - Massenterm: Chiralität ist nicht erhalten, sondern oszilliert.

- Weyl-Spinor: 2 komplexe Komponenten.
 - Eigenzustand von γ^5 : wohldefinierte Chiralität.
 - ψ^c beschreibt das Antiteilchen (entgegengesetzte Chiralität).
 - Masseloses Teilchen: Chiralität = Helizität ist Erhaltungsgröße.
 - Teilchen und Antiteilchen unterscheiden sich voneinander.
- Dirac-Spinor: 4 komplexe Komponenten.
 - Beschreibt je ein Teilchen und Antiteilchen beider Chiralitäten.
 - Teilchen und Antiteilchen unterscheiden sich voneinander.
 - Massenterm: Chiralität ist nicht erhalten, sondern oszilliert.
- Majorana-Spinor: 4 reelle Komponenten.
 - Beschreibt ein Teilchen, das sein eigenes Antiteilchen ist: $\psi = \psi^c$.
 - Äquivalent beschrieben durch die 2 komplexen Komponenten ψ_L oder $\psi_R = (\psi_L)^c$.
 - Chiralität korreliert mit Teilchen-Antiteilchen Eigenschaft.
 - Massenterm: Oszillation zwischen L-Teilchen und R-Antiteilchen.

- 1 Der Doppel- β -Zerfall
- 2 Dirac- und Majorana-Teilchen
- 3 Das Neutrino im Standardmodell**
- 4 Jenseits des Standardmodells: massive Neutrinos
- 5 Zusammenfassung

- Die Materieteilchen:
 - Die geladenen Leptonen: e^- , μ^- , τ^- .
 - Die Neutrinos: ν_e , ν_μ , ν_τ .
 - Die Up-Typ-Quarks: u , c , t .
 - Die Down-Typ-Quarks: d , s , b .

- Die Materieteilchen und ihre Antiteilchen:
 - Die geladenen Leptonen: e^- , μ^- , τ^- , e^+ , μ^+ , τ^+ .
 - Die Neutrinos: ν_e , ν_μ , ν_τ , $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$.
 - Die Up-Typ-Quarks: u , c , t , \bar{u} , \bar{c} , \bar{t} .
 - Die Down-Typ-Quarks: d , s , b , \bar{d} , \bar{s} , \bar{b} .

- Die Materieteilchen und ihre Antiteilchen:
 - Die geladenen Leptonen: e^- , μ^- , τ^- , e^+ , μ^+ , τ^+ .
 - Die Neutrinos: ν_e , ν_μ , ν_τ , $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$.
 - Die Up-Typ-Quarks: u , c , t , \bar{u} , \bar{c} , \bar{t} .
 - Die Down-Typ-Quarks: d , s , b , \bar{d} , \bar{s} , \bar{b} .
- Die Wechselwirkungsteilchen:
 - Die elektromagnetische Wechselwirkung: γ .
 - Die schwache Wechselwirkung: W^\pm , Z .
 - Die starke Wechselwirkung: g .

- Die Materieteilchen und ihre Antiteilchen:
 - Die geladenen Leptonen: e^- , μ^- , τ^- , e^+ , μ^+ , τ^+ .
 - Die Neutrinos: ν_e , ν_μ , ν_τ , $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$.
 - Die Up-Typ-Quarks: u , c , t , \bar{u} , \bar{c} , \bar{t} .
 - Die Down-Typ-Quarks: d , s , b , \bar{d} , \bar{s} , \bar{b} .
- Die Wechselwirkungsteilchen:
 - Die elektromagnetische Wechselwirkung: γ .
 - Die schwache Wechselwirkung: W^\pm , Z .
 - Die starke Wechselwirkung: g .
- Das Higgs-Teilchen: H .

- Die Materieteilchen und ihre Antiteilchen:
 - Die geladenen Leptonen: e^- , μ^- , τ^- , e^+ , μ^+ , τ^+ .
 - Die Neutrinos: ν_e , ν_μ , ν_τ , $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$.
 - Die Up-Typ-Quarks: u , c , t , \bar{u} , \bar{c} , \bar{t} .
 - Die Down-Typ-Quarks: d , s , b , \bar{d} , \bar{s} , \bar{b} .
- Die Wechselwirkungsteilchen:
 - Die elektromagnetische Wechselwirkung: γ .
 - Die schwache Wechselwirkung: W^\pm , Z .
 - Die starke Wechselwirkung: g .
- Das Higgs-Teilchen: H .

Die relevanten Teilchen als (Quanten-)Felder

- Das Elektron e^- und das Positron e^+ :
 - Gemeinsam beschrieben durch *ein* Dirac-Spinor-Feld e .
 - 4 komplexe Komponenten \sim links- und rechtshändiges Teilchen / Antiteilchen.
 - Zerlegung in zwei Weyl-Spinoren:

$$e_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2} e, \quad e_R = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2} e.$$

Die relevanten Teilchen als (Quanten-)Felder

- Das Elektron e^- und das Positron e^+ :
 - Gemeinsam beschrieben durch *ein* Dirac-Spinor-Feld e .
 - 4 komplexe Komponenten \sim links- und rechtshändiges Teilchen / Antiteilchen.
 - Zerlegung in zwei Weyl-Spinoren:

$$e_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2} e, \quad e_R = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2} e.$$

- Das Neutrino und das Antineutrino:
 - Gemeinsam beschrieben durch *ein* Weyl-Spinor-Feld ν_{eL} .
 - 2 komplexe Komponenten \sim linkshändiges Teilchen / rechtshändiges Antiteilchen.

Die relevanten Teilchen als (Quanten-)Felder

- Das Elektron e^- und das Positron e^+ :
 - Gemeinsam beschrieben durch *ein* Dirac-Spinor-Feld e .
 - 4 komplexe Komponenten \sim links- und rechtshändiges Teilchen / Antiteilchen.
 - Zerlegung in zwei Weyl-Spinoren:

$$e_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2} e, \quad e_R = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2} e.$$

- Das Neutrino und das Antineutrino:
 - Gemeinsam beschrieben durch *ein* Weyl-Spinor-Feld ν_{eL} .
 - 2 komplexe Komponenten \sim linkshändiges Teilchen / rechtshändiges Antiteilchen.
- Die Austauscheteilchen der elektroschwachen Wechselwirkung (W^\pm, Z, γ):
 - Bosonen vom Spin 1 beschrieben durch 3 + 1 Vektorfelder \vec{A}_a und B_a .
 - Beobachtete Teilchen sind Linearkombination der fundamentalen Felder.

Die relevanten Teilchen als (Quanten-)Felder

- Das Elektron e^- und das Positron e^+ :
 - Gemeinsam beschrieben durch *ein* Dirac-Spinor-Feld e .
 - 4 komplexe Komponenten \sim links- und rechtshändiges Teilchen / Antiteilchen.
 - Zerlegung in zwei Weyl-Spinoren:

$$e_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2} e, \quad e_R = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2} e.$$

- Das Neutrino und das Antineutrino:
 - Gemeinsam beschrieben durch *ein* Weyl-Spinor-Feld ν_{eL} .
 - 2 komplexe Komponenten \sim linkshändiges Teilchen / rechtshändiges Antiteilchen.
- Die Austauscheteilchen der elektroschwachen Wechselwirkung (W^\pm, Z, γ):
 - Bosonen vom Spin 1 beschrieben durch 3 + 1 Vektorfelder \vec{A}_a und B_a .
 - Beobachtete Teilchen sind Linearkombination der fundamentalen Felder.
- Das Higgs-Teilchen:
 - Beschrieben durch zwei komplexe Skalarfelder (ϕ^+, ϕ^0).
 - Vakuumerwartungswert $v \neq 0$ verantwortlich für elektroschwache Symmetriebrechung.

- Kinetische Terme für die Leptonen (links- und rechtshändig):

$$i(\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{e}_L) \gamma^a \partial_a \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} + i\bar{e}_R \gamma^a \partial_a e_R = i\bar{e} \gamma^a \partial_a e + i\bar{\nu}_{eL} \gamma^a \partial_a \nu_{eL} .$$

Relevante Terme aus der Standardmodell-Wirkung

- Kinetische Terme für die Leptonen (links- und rechtshändig):

$$i(\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{e}_L) \gamma^a \partial_a \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} + i\bar{e}_R \gamma^a \partial_a e_R = i\bar{e} \gamma^a \partial_a e + i\bar{\nu}_{eL} \gamma^a \partial_a \nu_{eL} .$$

- Kopplung an \vec{A} nur für linkshändige Teilchen:

$$-\frac{g}{2} (\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{e}_L) \gamma^a \begin{pmatrix} A_a^3 & A_a^1 - iA_a^2 \\ A_a^1 + iA_a^2 & -A_a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} .$$

Relevante Terme aus der Standardmodell-Wirkung

- Kinetische Terme für die Leptonen (links- und rechtshändig):

$$i(\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{e}_L) \gamma^a \partial_a \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} + i\bar{e}_R \gamma^a \partial_a e_R = i\bar{e} \gamma^a \partial_a e + i\bar{\nu}_{eL} \gamma^a \partial_a \nu_{eL}.$$

- Kopplung an \vec{A} nur für linkshändige Teilchen:

$$-\frac{g}{2} (\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{e}_L) \gamma^a \begin{pmatrix} A_a^3 & A_a^1 - iA_a^2 \\ A_a^1 + iA_a^2 & -A_a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}.$$

- Kopplung an B unterschiedlich für beide Chiralitäten:

$$-\frac{g'}{2} (\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{e}_L) \gamma^a B_a \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} - g' \bar{e}_R \gamma^a B_a e_R.$$

Relevante Terme aus der Standardmodell-Wirkung

- Kinetische Terme für die Leptonen (links- und rechtshändig):

$$i (\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{e}_L) \gamma^a \partial_a \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} + i \bar{e}_R \gamma^a \partial_a e_R = i \bar{e} \gamma^a \partial_a e + i \bar{\nu}_{eL} \gamma^a \partial_a \nu_{eL} .$$

- Kopplung an \vec{A} nur für linkshändige Teilchen:

$$-\frac{g}{2} (\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{e}_L) \gamma^a \begin{pmatrix} A_a^3 & A_a^1 - iA_a^2 \\ A_a^1 + iA_a^2 & -A_a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} .$$

- Kopplung an B unterschiedlich für beide Chiralitäten:

$$-\frac{g'}{2} (\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{e}_L) \gamma^a B_a \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} - g' \bar{e}_R \gamma^a B_a e_R .$$

- Higgs-Teilchen koppelt links- und rechtshändige Spinoren:

$$-g_e \left[(\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{e}_L) \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R ((\phi^+)^* \quad (\phi^0)^*) \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \right] .$$

Einige resultierende Terme aus dem Higgs-Mechanismus

- Vakuumerwartungswert $\langle \phi^0 \rangle = v \neq 0$: Dirac-Wirkung

$$\bar{e}(i\gamma^a \partial_a - m_e)e$$

Einige resultierende Terme aus dem Higgs-Mechanismus

- Vakuumerwartungswert $\langle \phi^0 \rangle = v \neq 0$: Dirac-Wirkung für **massives** Teilchen $m_e = g_e v$

$$\bar{e}(i\gamma^a \partial_a - m_e)e = \bar{e}_L i\gamma^a \partial_a e_L + \bar{e}_R i\gamma^a \partial_a e_R - m_e(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L).$$

Einige resultierende Terme aus dem Higgs-Mechanismus

- Vakuumerwartungswert $\langle \phi^0 \rangle = v \neq 0$: Dirac-Wirkung für massives Teilchen $m_e = g_e v$

$$\bar{e}(i\gamma^a \partial_a - m_e)e = \bar{e}_L i\gamma^a \partial_a e_L + \bar{e}_R i\gamma^a \partial_a e_R - m_e(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L).$$

- Vakuumerwartungswert $\langle \phi^+ \rangle = 0$: Weyl-Spinor ist **masselos**

$$\bar{\nu}_e i\gamma^a \partial_a \nu_e = \bar{\nu}_{eL} i\gamma^a \partial_a \nu_{eL}.$$

Einige resultierende Terme aus dem Higgs-Mechanismus

- Vakuumerwartungswert $\langle \phi^0 \rangle = v \neq 0$: Dirac-Wirkung für massives Teilchen $m_e = g_e v$

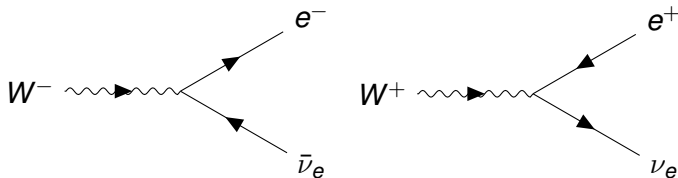
$$\bar{e}(i\gamma^a \partial_a - m_e)e = \bar{e}_L i\gamma^a \partial_a e_L + \bar{e}_R i\gamma^a \partial_a e_R - m_e(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L).$$

- Vakuumerwartungswert $\langle \phi^+ \rangle = 0$: Weyl-Spinor ist masselos

$$\bar{\nu}_e i\gamma^a \partial_a \nu_e = \bar{\nu}_{eL} i\gamma^a \partial_a \nu_{eL}.$$

- $W_a^\pm = (A_a^1 \pm iA_a^2)/\sqrt{2}$: Kopplung **linkshändiger** Teilchen an die schwache WW:

$$-\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \gamma^a W_a^- \nu_{eL} + \bar{\nu}_{eL} \gamma^a W_a^+ e_L).$$



- 1 Der Doppel- β -Zerfall
- 2 Dirac- und Majorana-Teilchen
- 3 Das Neutrino im Standardmodell
- 4 Jenseits des Standardmodells: massive Neutrinos**
- 5 Zusammenfassung

- Beobachtungen zur Neutrino-Oszillation:
 - Solares Neutrino-Rätsel: weniger Elektron-Neutrinos gemessen als erzeugt.
 - (Super-)Kamiokande: weniger Elektron-Antineutrinos aus Reaktoren beobachtet.
 - Atmosphärische Muon-(Anti)-Neutrinos nehmen beim Durchqueren der Erde ab.
 - CNGS: Muon-Neutrinos vom CERN zum Gran Sasso in **Tau-Neutrinos umgewandelt**.

- Beobachtungen zur Neutrino-Oszillation:
 - Solares Neutrino-Rätsel: weniger Elektron-Neutrinos gemessen als erzeugt.
 - (Super-)Kamiokande: weniger Elektron-Antineutrinos aus Reaktoren beobachtet.
 - Atmosphärische Muon-(Anti)-Neutrinos nehmen beim Durchqueren der Erde ab.
 - CNGS: Muon-Neutrinos vom CERN zum Gran Sasso in Tau-Neutrinos umgewandelt.
- Neutrino-Oszillationsrate $\sim \Delta m^2 \Rightarrow$ Neutrinos müssen Masse haben.

- Beobachtungen zur Neutrino-Oszillation:
 - Solares Neutrino-Rätsel: weniger Elektron-Neutrinos gemessen als erzeugt.
 - (Super-)Kamiokande: weniger Elektron-Antineutrinos aus Reaktoren beobachtet.
 - Atmosphärische Muon-(Anti)-Neutrinos nehmen beim Durchqueren der Erde ab.
 - CNGS: Muon-Neutrinos vom CERN zum Gran Sasso in Tau-Neutrinos umgewandelt.
- Neutrino-Oszillationsrate $\sim \Delta m^2 \Rightarrow$ Neutrinos müssen Masse haben.
- ⚡ Neutrinos als Weyl-Teilchen im Standardmodell masselos.

- Beobachtungen zur Neutrino-Oszillation:
 - Solares Neutrino-Rätsel: weniger Elektron-Neutrinos gemessen als erzeugt.
 - (Super-)Kamiokande: weniger Elektron-Antineutrinos aus Reaktoren beobachtet.
 - Atmosphärische Muon-(Anti)-Neutrinos nehmen beim Durchqueren der Erde ab.
 - CNGS: Muon-Neutrinos vom CERN zum Gran Sasso in Tau-Neutrinos umgewandelt.
 - Neutrino-Oszillationsrate $\sim \Delta m^2 \Rightarrow$ Neutrinos müssen Masse haben.
 - ⚡ Neutrinos als Weyl-Teilchen im Standardmodell masselos.
- \Rightarrow Ergänzung des Standardmodell-Neutrinos - Dirac oder Majorana?

- Annahme: zusätzliches rechtshändiges Neutrino ν_{eR} .

Das Neutrino als Dirac-Teilchen

- Annahme: zusätzliches rechtshändiges Neutrino ν_{eR} .
 - Kopplung des Neutrinos an Wechselwirkungen des Standardmodells:
 - $\nu_{eL}, \bar{\nu}_{eL}, \nu_{eR}, \bar{\nu}_{eR}$ sind verschiedene Teilchen.
 - Keine weiteren Terme außer $\bar{e}_L \gamma^a W_a^- \nu_{eL} + \bar{\nu}_{eL} \gamma^a W_a^+ e_L$.
- ⇒ ν_{eR} ist "steril" - keine elektromagnetische, schwache, starke Wechselwirkung.

Das Neutrino als Dirac-Teilchen

- Annahme: zusätzliches rechtshändiges Neutrino ν_{eR} .
- Kopplung des Neutrinos an Wechselwirkungen des Standardmodells:
 - $\nu_{eL}, \bar{\nu}_{eL}, \nu_{eR}, \bar{\nu}_{eR}$ sind verschiedene Teilchen.
 - Keine weiteren Terme außer $\bar{e}_L \gamma^a W_a^- \nu_{eL} + \bar{\nu}_{eL} \gamma^a W_a^+ e_L$.
- ⇒ ν_{eR} ist "steril" - keine elektromagnetische, schwache, starke Wechselwirkung.
- Masse des Neutrinos:

- Rechtshändiges Neutrino erlaubt Kopplung an das Higgs-Teilchen:

$$-g_\nu \left[(\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{e}_L) \begin{pmatrix} (\phi^0)^* \\ (\phi^+)^* \end{pmatrix} \nu_{eR} + \bar{\nu}_{eR} \begin{pmatrix} \phi^0 & \phi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \right].$$

- ⇒ Vakuumerwartungswert $\langle \phi^0 \rangle = v$ gibt Dirac-Massenterm mit $m_\nu = g_\nu v$:

$$-m_\nu \bar{\nu}_e \nu_e = -m_\nu (\bar{\nu}_{eL} \nu_{eR} + \bar{\nu}_{eR} \nu_{eL}).$$

- ⇒ Oszillation zwischen $\nu_{eL} \leftrightarrow \nu_{eR}$ bzw. $\bar{\nu}_{eL} \leftrightarrow \bar{\nu}_{eR}$.

- Vakuumerwartungswert des Higgs-Teilchens: $v \approx 246 \text{ GeV}$.

- ⇒ **Extrem kleine Kopplungskonstante $g_\nu \approx 10^{-12} - 10^{-11} \Rightarrow$ Hierarchie"problem"?**

Das Neutrino als Dirac-Teilchen

- Annahme: zusätzliches rechtshändiges Neutrino ν_{eR} .
- Kopplung des Neutrinos an Wechselwirkungen des Standardmodells:
 - $\nu_{eL}, \bar{\nu}_{eL}, \nu_{eR}, \bar{\nu}_{eR}$ sind verschiedene Teilchen.
 - Keine weiteren Terme außer $\bar{e}_L \gamma^a W_a^- \nu_{eL} + \bar{\nu}_{eL} \gamma^a W_a^+ e_L$.
- ⇒ ν_{eR} ist "steril" - keine elektromagnetische, schwache, starke Wechselwirkung.
- Masse des Neutrinos:

- Rechtshändiges Neutrino erlaubt Kopplung an das Higgs-Teilchen:

$$-g_\nu \left[(\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{e}_L) \begin{pmatrix} (\phi^0)^* \\ (\phi^+)^* \end{pmatrix} \nu_{eR} + \bar{\nu}_{eR} \begin{pmatrix} \phi^0 & \phi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \right].$$

- ⇒ Vakuumerwartungswert $\langle \phi^0 \rangle = v$ gibt Dirac-Massenterm mit $m_\nu = g_\nu v$:

$$-m_\nu \bar{\nu}_e \nu_e = -m_\nu (\bar{\nu}_{eL} \nu_{eR} + \bar{\nu}_{eR} \nu_{eL}).$$

- ⇒ Oszillation zwischen $\nu_{eL} \leftrightarrow \nu_{eR}$ bzw. $\bar{\nu}_{eL} \leftrightarrow \bar{\nu}_{eR}$.

- Vakuumerwartungswert des Higgs-Teilchens: $v \approx 246 \text{ GeV}$.

- ⇒ Extrem kleine Kopplungskonstante $g_\nu \approx 10^{-12} - 10^{-11} \Rightarrow$ Hierarchie"problem"?

⇒ Kein neutrinoloser Doppel- β -Zerfall.

Das Neutrino als Majorana-Teilchen

- Annahme: Neutrino ist Majorana-Teilchen mit $\nu_{eR} = (\nu_{eL})^c$.

Das Neutrino als Majorana-Teilchen

- Annahme: Neutrino ist Majorana-Teilchen mit $\nu_{eR} = (\nu_{eL})^c$.
- Aufgabe: konstruiere aus Feldern im Standardmodell den Massenterm

$$-m_\nu (\bar{\nu}_{eL})^c \nu_{eL}.$$

- Term soll invariant unter SU(2) sein: Dublett (ν_{eL}, e_L) .
- Term soll invariant unter U(1) sein (Ladungserhaltung): $(\bar{e}_L)^c e_L$ verboten.

Das Neutrino als Majorana-Teilchen

- Annahme: Neutrino ist Majorana-Teilchen mit $\nu_{eR} = (\nu_{eL})^c$.
- Aufgabe: konstruiere aus Feldern im Standardmodell den Massenterm

$$-m_\nu (\bar{\nu}_{eL})^c \nu_{eL}.$$

- Term soll invariant unter SU(2) sein: Dublett (ν_{eL}, e_L) .
- Term soll invariant unter U(1) sein (Ladungserhaltung): $(\bar{e}_L)^c e_L$ verboten.
- Naiver Ansatz:

$$-g_\nu \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad (\bar{e}_L)^c) \begin{pmatrix} (\phi^0)^* \\ (\phi^+)^* \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} \phi^0 & \phi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \right].$$

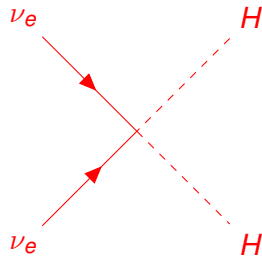
Das Neutrino als Majorana-Teilchen

- Annahme: Neutrino ist Majorana-Teilchen mit $\nu_{eR} = (\nu_{eL})^c$.
- Aufgabe: konstruiere aus Feldern im Standardmodell den Massenterm

$$-m_\nu (\bar{\nu}_{eL})^c \nu_{eL}.$$

- Term soll invariant unter SU(2) sein: Dublett (ν_{eL}, e_L) .
- Term soll invariant unter U(1) sein (Ladungserhaltung): $(\bar{e}_L)^c e_L$ verboten.
- Naiver Ansatz:

$$-g_\nu \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad (\bar{e}_L)^c) \begin{pmatrix} (\phi^0)^* \\ (\phi^+)^* \end{pmatrix} \right] \left[(\phi^0 \quad \phi^+) \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \right].$$



⚡ 4-Teilchen Wechselwirkung nicht renormierbar.

Der Seesaw-Mechanismus

- Annahme: zwei Majorana-Teilchen $\nu_{eR} = (\nu_{eL})^c$, $N_{eL} = (N_{eR})^c$.

Der Seesaw-Mechanismus

- Annahme: zwei Majorana-Teilchen $\nu_{eR} = (\nu_{eL})^c$, $N_{eL} = (N_{eR})^c$.
- Mögliche Massenterme für zwei Felder:

$$- \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad \bar{N}_{eR}) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ (N_{eR})^c \end{pmatrix} \right].$$

Der Seesaw-Mechanismus

- Annahme: zwei Majorana-Teilchen $\nu_{eR} = (\nu_{eL})^c$, $N_{eL} = (N_{eR})^c$.
- Mögliche Massenterme für zwei Felder:

$$- \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad \bar{N}_{eR}) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ (N_{eR})^c \end{pmatrix} \right].$$

- Mögliche Konstruktion der Massenterme:
 - $-m_L(\bar{\nu}_{eL})^c\nu_{eL}$: nicht verträglich mit schwacher Wechselwirkung $\Rightarrow m_L = 0$.

Der Seesaw-Mechanismus

- Annahme: zwei Majorana-Teilchen $\nu_{eR} = (\nu_{eL})^c$, $N_{eL} = (N_{eR})^c$.
- Mögliche Massenterme für zwei Felder:

$$- \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad \bar{N}_{eR}) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ (N_{eR})^c \end{pmatrix} \right].$$

- Mögliche Konstruktion der Massenterme:
 - $-m_L (\bar{\nu}_{eL})^c \nu_{eL}$: nicht verträglich mit schwacher Wechselwirkung $\Rightarrow m_L = 0$.
 - $-m_D [(\bar{\nu}_{eL})^c (N_{eR})^c + \bar{N}_{eR} \nu_{eL}]$: durch Higgs-Mechanismus aus Yukawa-Kopplung

$$-g_\nu \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad (\bar{e}_L)^c) \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^+ \end{pmatrix} (N_{eR})^c + \bar{N}_{eR} (\phi^0 \quad \phi^+) \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \right].$$

Der Seesaw-Mechanismus

- Annahme: zwei Majorana-Teilchen $\nu_{eR} = (\nu_{eL})^c$, $N_{eL} = (N_{eR})^c$.
- Mögliche Massenterme für zwei Felder:

$$- \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad \bar{N}_{eR}) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ (N_{eR})^c \end{pmatrix} \right].$$

- Mögliche Konstruktion der Massenterme:
 - $-m_L(\bar{\nu}_{eL})^c\nu_{eL}$: nicht verträglich mit schwacher Wechselwirkung $\Rightarrow m_L = 0$.
 - $-m_D[(\bar{\nu}_{eL})^c(N_{eR})^c + \bar{N}_{eR}\nu_{eL}]$: durch Higgs-Mechanismus aus Yukawa-Kopplung

$$-g_\nu \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad (\bar{e}_L)^c) \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^+ \end{pmatrix} (N_{eR})^c + \bar{N}_{eR} (\phi^0 \quad \phi^+) \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \right].$$

- $-m_R\bar{N}_{eR}(N_{eR})^c$: aus Symmetriebrechung im GUT-Modell.

Der Seesaw-Mechanismus

- Annahme: zwei Majorana-Teilchen $\nu_{eR} = (\nu_{eL})^c$, $N_{eL} = (N_{eR})^c$.
- Mögliche Massenterme für zwei Felder:

$$- \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad \bar{N}_{eR}) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ (N_{eR})^c \end{pmatrix} \right].$$

- Mögliche Konstruktion der Massenterme:
 - $-m_L(\bar{\nu}_{eL})^c\nu_{eL}$: nicht verträglich mit schwacher Wechselwirkung $\Rightarrow m_L = 0$.
 - $-m_D[(\bar{\nu}_{eL})^c(N_{eR})^c + \bar{N}_{eR}\nu_{eL}]$: durch **Higgs-Mechanismus** aus Yukawa-Kopplung

$$-g_\nu \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad (\bar{e}_L)^c) \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^+ \end{pmatrix} (N_{eR})^c + \bar{N}_{eR} (\phi^0 \quad \phi^+) \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \right].$$

- $-m_R\bar{N}_{eR}(N_{eR})^c$: aus **Symmetriebrechung im GUT-Modell**.
- Typische (“natürliche”) Größenordnung: $m_D \approx 10^2\text{GeV}$, $m_R \approx 10^{15}\text{GeV}$.

Der Seesaw-Mechanismus

- Annahme: zwei Majorana-Teilchen $\nu_{eR} = (\nu_{eL})^c$, $N_{eL} = (N_{eR})^c$.
- Mögliche Massenterme für zwei Felder:

$$- \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad \bar{N}_{eR}) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ (N_{eR})^c \end{pmatrix} \right].$$

- Mögliche Konstruktion der Massenterme:
 - $-m_L(\bar{\nu}_{eL})^c\nu_{eL}$: nicht verträglich mit schwacher Wechselwirkung $\Rightarrow m_L = 0$.
 - $-m_D[(\bar{\nu}_{eL})^c(N_{eR})^c + \bar{N}_{eR}\nu_{eL}]$: durch Higgs-Mechanismus aus Yukawa-Kopplung

$$-g_\nu \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad (\bar{e}_L)^c) \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^+ \end{pmatrix} (N_{eR})^c + \bar{N}_{eR} (\phi^0 \quad \phi^+) \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \right].$$

- $-m_R\bar{N}_{eR}(N_{eR})^c$: aus Symmetriebrechung im GUT-Modell.
- Typische (“natürliche”) Größenordnung: $m_D \approx 10^2\text{GeV}$, $m_R \approx 10^{15}\text{GeV}$.
- Masseneigenzustände gegeben durch Eigenwerte m_\pm mit $m_R \gg m_D$:

$$m_\pm = \frac{m_R}{2} \pm \sqrt{\frac{m_R^2}{4} + m_D^2} \quad \Rightarrow \quad m_- \approx -\frac{m_D^2}{m_R} \approx 10^{-2}\text{eV}, \quad m_+ \approx m_R \approx 10^{15}\text{GeV}.$$

Der Seesaw-Mechanismus

- Annahme: zwei Majorana-Teilchen $\nu_{eR} = (\nu_{eL})^c$, $N_{eL} = (N_{eR})^c$.
- Mögliche Massenterme für zwei Felder:

$$- \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad \bar{N}_{eR}) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ (N_{eR})^c \end{pmatrix} \right].$$

- Mögliche Konstruktion der Massenterme:
 - $-m_L(\bar{\nu}_{eL})^c\nu_{eL}$: nicht verträglich mit schwacher Wechselwirkung $\Rightarrow m_L = 0$.
 - $-m_D[(\bar{\nu}_{eL})^c(N_{eR})^c + \bar{N}_{eR}\nu_{eL}]$: durch Higgs-Mechanismus aus Yukawa-Kopplung

$$-g_\nu \left[((\bar{\nu}_{eL})^c \quad (\bar{e}_L)^c) \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^+ \end{pmatrix} (N_{eR})^c + \bar{N}_{eR} (\phi^0 \quad \phi^+) \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \right].$$

- $-m_R\bar{N}_{eR}(N_{eR})^c$: aus Symmetriebrechung im GUT-Modell.
- Typische ("natürliche") Größenordnung: $m_D \approx 10^2\text{GeV}$, $m_R \approx 10^{15}\text{GeV}$.
- Masseneigenzustände gegeben durch Eigenwerte m_\pm mit $m_R \gg m_D$:

$$m_\pm = \frac{m_R}{2} \pm \sqrt{\frac{m_R^2}{4} + m_D^2} \quad \Rightarrow \quad m_- \approx -\frac{m_D^2}{m_R} \approx 10^{-2}\text{eV}, \quad m_+ \approx m_R \approx 10^{15}\text{GeV}.$$

- Leichtes Neutrino oszilliert via schwerem zu Antineutrino \Rightarrow geringer $0\nu-2\beta$ Anteil.

- 1 Der Doppel- β -Zerfall
- 2 Dirac- und Majorana-Teilchen
- 3 Das Neutrino im Standardmodell
- 4 Jenseits des Standardmodells: massive Neutrinos
- 5 Zusammenfassung

- Der Doppel- β -Zerfall:
 - Manche Nuklide sind instabil und zerfallen nur durch Doppel- β -Zerfall.
 - Standardmodell erlaubt nur Doppel- β -Zerfall mit zwei Neutrinos.
 - Wenn Neutrino = Antineutrino, auch neutrinoloser Doppel- β -Zerfall möglich.
 - Beide Zerfallsarten unterscheiden sich durch Spektrum der Elektronen.

- Der Doppel- β -Zerfall:
 - Manche Nuklide sind instabil und zerfallen nur durch Doppel- β -Zerfall.
 - Standardmodell erlaubt nur Doppel- β -Zerfall mit zwei Neutrinos.
 - Wenn Neutrino = Antineutrino, auch neutrinoloser Doppel- β -Zerfall möglich.
 - Beide Zerfallsarten unterscheiden sich durch Spektrum der Elektronen.
- Spinoren als Darstellungen der Spingruppe:
 - Dirac-Spinor: 4 komplexe Komponenten, Teilchen/Antiteilchen beider Chiralität.
 - Weyl-Spinor: 2 komplexe Komponenten, nur eine Chiralität, Teilchen/Antiteilchen.
 - Majorana-Teilchen: 4 reelle Komponenten, Teilchen = Antiteilchen.

- Der Doppel- β -Zerfall:
 - Manche Nuklide sind instabil und zerfallen nur durch Doppel- β -Zerfall.
 - Standardmodell erlaubt nur Doppel- β -Zerfall mit zwei Neutrinos.
 - Wenn Neutrino = Antineutrino, auch neutrinoloser Doppel- β -Zerfall möglich.
 - Beide Zerfallsarten unterscheiden sich durch Spektrum der Elektronen.
- Spinoren als Darstellungen der Spingruppe:
 - Dirac-Spinor: 4 komplexe Komponenten, Teilchen/Antiteilchen beider Chiralität.
 - Weyl-Spinor: 2 komplexe Komponenten, nur eine Chiralität, Teilchen/Antiteilchen.
 - Majorana-Teilchen: 4 reelle Komponenten, Teilchen = Antiteilchen.
- Das Neutrino im Standardmodell:
 - Schwache Wechselwirkung koppelt nur an linkshändige Teilchen (Quarks, Leptonen).
 - Neutrino als Weyl-Spinor: nur linkshändiges Teilchen (+ rechtsh. Antiteilchen).
 - Neutrino ist masselos - Widerspruch zur beobachteten Neutrino-Oszillation.

- Der Doppel- β -Zerfall:
 - Manche Nuklide sind instabil und zerfallen nur durch Doppel- β -Zerfall.
 - Standardmodell erlaubt nur Doppel- β -Zerfall mit zwei Neutrinos.
 - Wenn Neutrino = Antineutrino, auch neutrinoloser Doppel- β -Zerfall möglich.
 - Beide Zerfallsarten unterscheiden sich durch Spektrum der Elektronen.
- Spinoren als Darstellungen der Spingruppe:
 - Dirac-Spinor: 4 komplexe Komponenten, Teilchen/Antiteilchen beider Chiralität.
 - Weyl-Spinor: 2 komplexe Komponenten, nur eine Chiralität, Teilchen/Antiteilchen.
 - Majorana-Teilchen: 4 reelle Komponenten, Teilchen = Antiteilchen.
- Das Neutrino im Standardmodell:
 - Schwache Wechselwirkung koppelt nur an linkshändige Teilchen (Quarks, Leptonen).
 - Neutrino als Weyl-Spinor: nur linkshändiges Teilchen (+ rechtsh. Antiteilchen).
 - Neutrino ist masselos - Widerspruch zur beobachteten Neutrino-Oszillation.
- Mechanismen für massive Neutrinos jenseits des Standardmodells:
 - Dirac-Neutrino: zusätzliches rechtshändiges Neutrino - Massenhierarchieproblem?
 - Majorana-Neutrino: Teilchen = Antiteilchen; Massenterm erfordert erweitertes SM.
 - Seesaw-Mechanismus: zusätzliches steriles Neutrino, Dirac- und Majorana-Terme.

- Der Doppel- β -Zerfall:
 - Manche Nuklide sind instabil und zerfallen nur durch Doppel- β -Zerfall.
 - Standardmodell erlaubt nur Doppel- β -Zerfall mit zwei Neutrinos.
 - Wenn Neutrino = Antineutrino, auch neutrinoloser Doppel- β -Zerfall möglich.
 - Beide Zerfallsarten unterscheiden sich durch Spektrum der Elektronen.
- Spinoren als Darstellungen der Spingruppe:
 - Dirac-Spinor: 4 komplexe Komponenten, Teilchen/Antiteilchen beider Chiralität.
 - Weyl-Spinor: 2 komplexe Komponenten, nur eine Chiralität, Teilchen/Antiteilchen.
 - Majorana-Teilchen: 4 reelle Komponenten, Teilchen = Antiteilchen.
- Das Neutrino im Standardmodell:
 - Schwache Wechselwirkung koppelt nur an linkshändige Teilchen (Quarks, Leptonen).
 - Neutrino als Weyl-Spinor: nur linkshändiges Teilchen (+ rechtsh. Antiteilchen).
 - Neutrino ist masselos - Widerspruch zur beobachteten Neutrino-Oszillation.
- Mechanismen für massive Neutrinos jenseits des Standardmodells:
 - Dirac-Neutrino: zusätzliches rechtshändiges Neutrino - Massenhierarchieproblem?
 - Majorana-Neutrino: Teilchen = Antiteilchen; Massenterm erfordert erweitertes SM.
 - Seesaw-Mechanismus: zusätzliches steriles Neutrino, Dirac- und Majorana-Terme.